14 Derivadas parciales

© Dreamstime

Las gráficas de funciones de dos variables son superficies que pueden tomar una variedad de formas, incluyendo algunas que tienen una silla o paso entre montañas. En este lugar, en Utah (conocido como "The wave"), puede verse un punto que es un mínimo en una dirección, pero es un máximo en otra dirección. Superficies como éstas se discuten en la sección 14.7.

Hasta ahora, hemos estudiado el cálculo de una función de una variable. Pero en el mundo real, las cantidades físicas dependen frecuentemente de dos o más variables, por lo que en este capítulo enfocaremos nuestra atención en las funciones de varias variables y extenderemos las ideas básicas del cálculo diferencial a tales funciones.

14.1 Funciones de varias variables

En esta sección se estudian funciones de dos o más variables desde cuatro puntos de vista:

- verbalmente (mediante una descripción hecha con palabras)
- numéricamente (mediante una tabla de valores)
- algebraicamente (mediante una fórmula explícita)
- visualmente (mediante una gráfica o curvas de nivel)

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra en cualquier momento dado, depende de la longitud x y la latitud y del punto. Se puede pensar que T es una función de dos variables x y y, o como una función del par (x, y). Esta dependencia funcional se indica escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h. De hecho, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h, y escribimos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**. [Compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una variable.]

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función es mediante un diagrama de flechas (véase figura 1), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y el rango es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z. Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana con la forma de D, podemos considerar al eje z como un termómetro que va mostrando el registro de temperaturas.

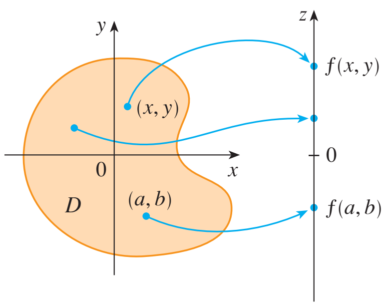


FIGURA 1

Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de parejas (x, y) para el cual la expresión dada es un número bien definido.

EJEMPLO 1 Para las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUCIÓN

a)
$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$, describe los puntos que quedan en o por arriba de la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio (véase figura 2).

b)
$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define sólo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Éste es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. Véase figura 3.

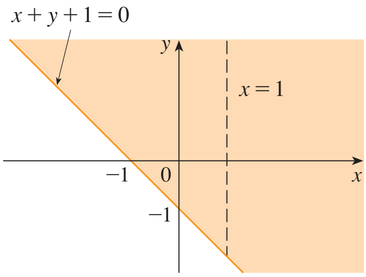


FIGURA 2
Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

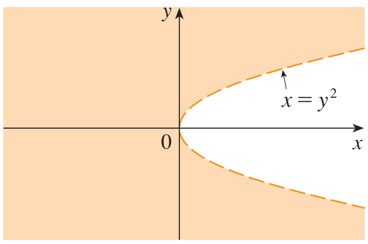


FIGURA 3
Dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Nuevo índice de temperatura de sensación
Se instituyó un nuevo índice de temperatura de sensación en noviembre de 2001, y es más exacto que el antiguo índice para medir qué tanto frío se siente cuando hace viento. El nuevo índice se basa en un modelo de qué tan rápido la cara de una persona pierde calor. Se desarrolló por medio de estudios clínicos en los cuales personas voluntarias fueron expuestas a una diversidad de temperaturas y magnitudes de velocidad de viento en un túnel de aire refrigerado.

No todas las funciones se dan en fórmulas explícitas. La función del ejemplo siguiente se describe en forma verbal y mediante estimaciones numéricas de sus valores.

EJEMPLO 2 En regiones donde el invierno es extremoso, el *índice de temperatura de sensación* se utiliza a menudo para representar la intensidad evidente del frío. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y de la rapidez del viento v. De este modo, W es una función de T y de v, y se escribe $W = f(T, v)$. En la tabla 1 se registran los valores de W que reunió el National Weather Service de Estados Unidos y el Meteorological Service de Canadá.

TABLA 1 Índice de temperatura de sensación en función de la temperatura del aire y de la velocidad del viento.

Rapidez del viento (km/h); Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por ejemplo, la tabla 1 muestra que si la temperatura es −5 °C y la rapidez del viento es de 50 km/h, entonces subjetivamente se sentiría tanto frío como si la temperatura fuera de casi −15 °C sin viento. Entonces

$$f(-5, 50) = -15$$

EJEMPLO 3 En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el cual modelaban el crecimiento de la economía estadounidense durante el periodo 1899-1922. Consideraron un punto de vista simplificado de la economía en el cual la producción está determinada por la cantidad de mano de obra relacionada y la cantidad de capital invertido. Si bien hay muchos otros factores que afectan el rendimiento económico, su modelo resultó ser notablemente exacto. La función mediante la cual modelaron la producción era de la forma

$$\boxed{1} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes que se producen en un año), L es la cantidad de mano de obra (la cantidad total de horas-hombre

TABLA 2

Año	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

trabajadas en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios). En la sección 14.3 se demuestra cómo la forma de la ecuación 1 se infiere de ciertas suposiciones económicas.

Cobb y Douglas se apoyaron en datos que publicó el gobierno para obtener la tabla 2. Tomaron el año 1899 como una línea de referencia y a P, L y K para 1899 se les asignó el valor de 100. Los valores de otros años se expresaron como porcentajes de los valores de 1899.

Cobb y Douglas aplicaron el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos de la tabla 2 a la función

$$\boxed{2} \qquad P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

(Véase ejercicio 79 si desea mayores detalles.)

Si usamos el modelo dado por la función en la ecuación 2 para calcular la producción en los años 1910 y 1920, obtenemos los valores

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

que son muy cercanos a los valores reales, 159 y 231.

La función de la producción $\boxed{1}$ se usó posteriormente en muchos contextos, que van desde compañías individuales hasta cuestiones económicas globales. Ahora se le conoce como la **función de la producción de Cobb-Douglas.** Su dominio es $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$ porque L y K representan mano de obra y capital y, por lo tanto, nunca son negativas.

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que es el disco con centro (0, 0) y radio 3 (véase figura 4). El rango de g es

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, tenemos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

y el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$

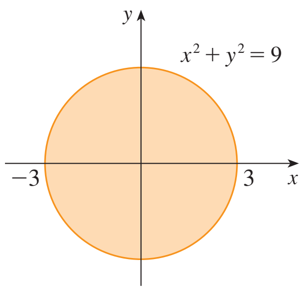


FIGURA 4
Dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Gráficas

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Podemos visualizar la gráfica S de f directamente sobre o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura 5).

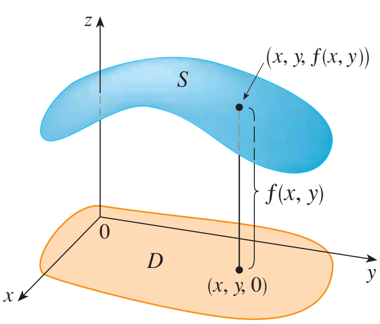


FIGURA 5

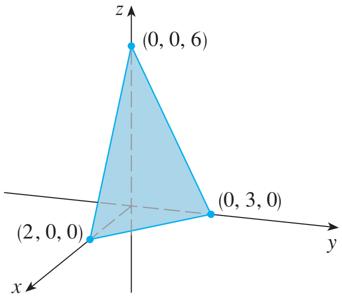


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano, primero obtenemos las intersecciones con los ejes. Hacemos $y = z = 0$ en la ecuación y obtenemos $x = 2$ como la intersección con el eje x. Con el mismo procedimiento obtenemos la intersección con el eje y, que es 3, y la del eje z, que es 6. Ya con esto puede trazar la parte de la gráfica que está en el primer octante (véase figura 6).

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

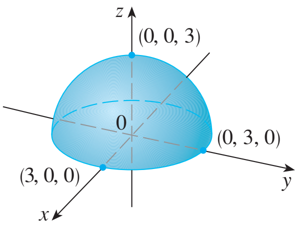


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN La ecuación de la gráfica es $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que se reconoce como la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es sólo la parte superior de esta esfera (véase figura 7).

NOTA No toda esfera puede ser representada por una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ está representado por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. El hemisferio inferior está representado por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 7 Mediante una computadora, trace la gráfica de la función de la producción de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

SOLUCIÓN En la figura 8 se muestra la gráfica de P para valores de la mano de obra L y el capital K que está entre 0 y 300. La computadora dibujó la superficie con trazas verticales. Según estas trazas el valor de la producción P se incrementa cuando L o K se incrementan, como era de esperarse.

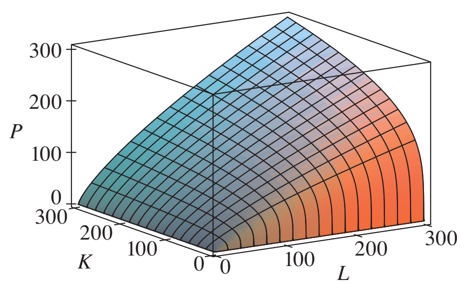


FIGURA 8

V EJEMPLO 8 Determine el dominio y el rango y grafique $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Observe que $h(x, y)$ está definida por todos los pares ordenados posibles de números reales (x, y), de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2$, todo el plano xy. El rango de h es el conjunto $[0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, de modo que $h(x, y) \geqslant 0$ para toda x y y.]

La gráfica de h tiene la ecuación $z = 4x^2 + y^2$, la cual es el paraboloide elíptico que se dibujó en el ejemplo 4 de la sección 12.6. Las trazas horizontales son elipses y las verticales son parábolas (véase figura 9).

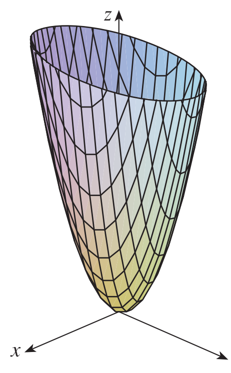
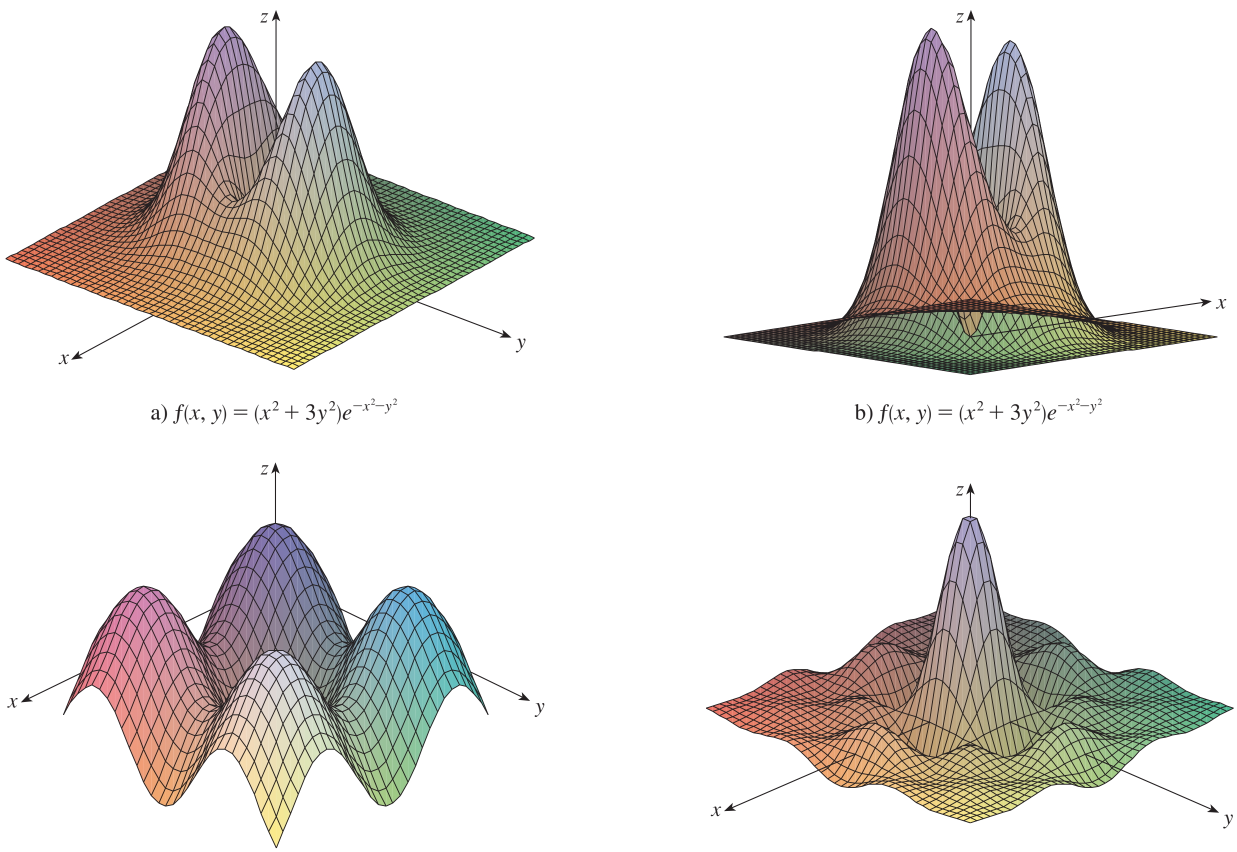


FIGURA 9
Gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Hay programas para computadora con los que se pueden obtener las gráficas de funciones de dos variables. En la mayoría de dichos programas las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores de k separados regularmente, y se eliminan algunas partes de la gráfica usando alguna función que elimine líneas ocultas.

En la figura 10 se ilustran gráficas de varias funciones generadas mediante una computadora. Observe que se consigue una imagen especialmente buena de una función cuando se usa la rotación para tener diferentes puntos de vista. En los incisos a) y b) la gráfica de f



a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

es muy plana y cercana al plano xy excepto cerca del origen. La razón es que $e^{-x^2-y^2}$ es muy pequeña cuando x o y es grande.

Curvas de nivel

Hasta ahora se cuenta con dos métodos para representar funciones: diagramas de flechas y gráficas. Un tercer método, tomado prestado de los cartógrafos, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar *líneas de contorno* o *curvas de nivel*.

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f.

Podemos ver en la figura 11 la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Entonces, si dibujamos las curvas de nivel de una función y las representamos como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces podemos formar mentalmente una imagen de la gráfica. La superficie tiene pendiente abrupta donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí. Es algo más plana donde las curvas de separan.

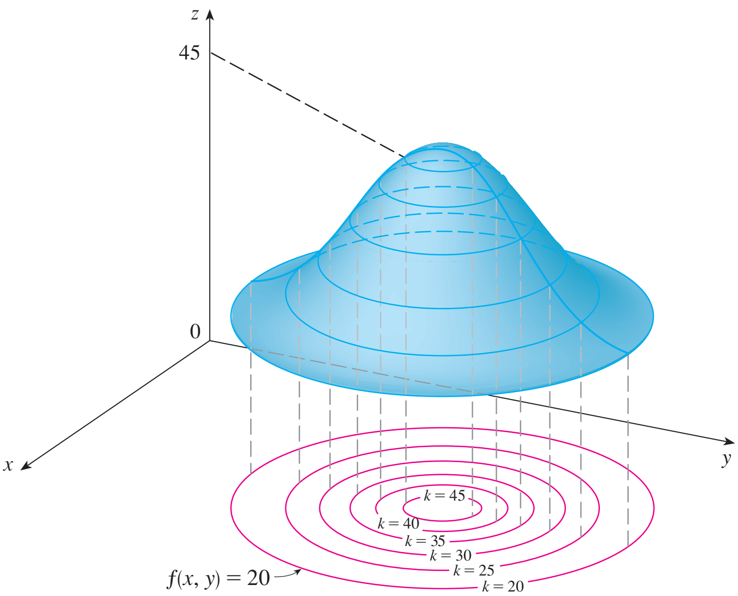


FIGURA 11

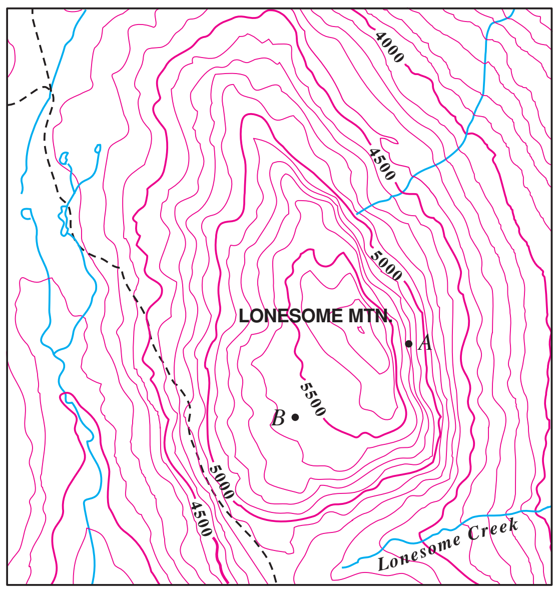


FIGURA 12

TEC Visual 14.1A proporciona figuras animadas de la figura 11 y muestra cómo se alzan las curvas de nivel hasta tener las gráficas de funciones.

Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa de la figura 12. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante por arriba del nivel del mar. Si camináramos por una de esas curvas de nivel, nunca ascenderíamos ni descenderíamos. Otro ejemplo común es la función de temperatura mencionada en la introducción de esta sección. En este caso, las curvas de nivel se denominan **isotermas**, y unen localidades con la misma temperatura. En la figura 13 se muestra un mapa climático de la cuenca del Océano Pacífico, en el que se indican las temperaturas promedio de un mes cualquiera. Las isotermas son las curvas que separan las bandas de colores

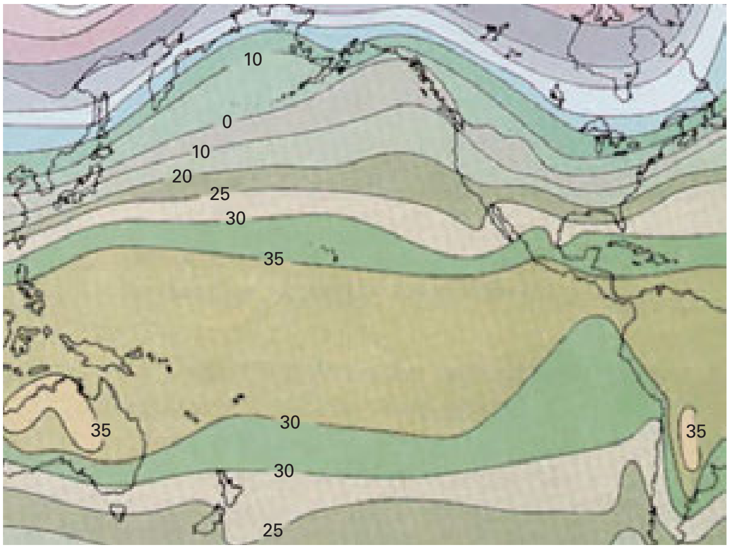


FIGURA 13
Promedio de temperaturas del Océano Pacífico en grados Celsius

EJEMPLO 9 Un mapa de líneas de contorno de una función f se ilustra en la figura 14. Úselo para estimar los valores de $f(1, 3)$ y $f(4, 5)$.

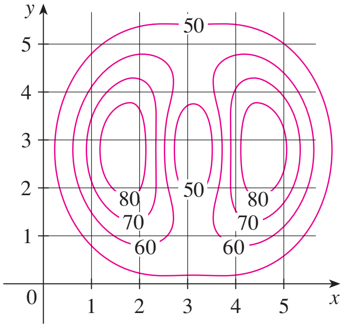


FIGURA 14

SOLUCIÓN El punto (1, 3) queda entre las curvas de nivel con valores de z de 70 y 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

En forma similar, estimamos que $\qquad f(4, 5) \approx 56$

EJEMPLO 10 Grafique las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Ésta es una familia de rectas cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$. Se grafican en la figura 15. Entre las curvas de nivel hay una separación igual, y dichas curvas son rectas paralelas porque la gráfica de f es un plano (véase figura 6).

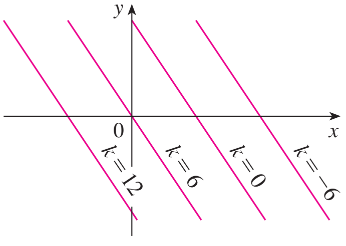


FIGURA 15
Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

V EJEMPLO 11 Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Ésta es una familia de circunferencias concéntricas con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se ilustran en la figura 16. Intente imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie, y compare con la gráfica de g (un hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)

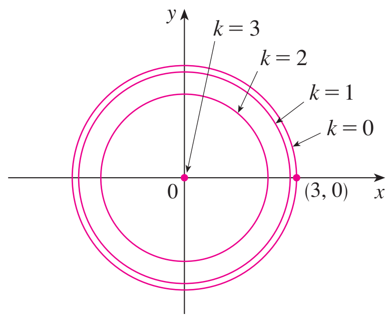


FIGURA 16
Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EJEMPLO 12 Grafique algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k - 1)} + \frac{y^2}{k - 1} = 1$$

la cual, para $k > 1$, describe una familia de elipses con semiejes $\frac{1}{2}\sqrt{k - 1}$ y $\sqrt{k - 1}$. En la figura 17a) se ilustra un mapa de contorno de h dibujado mediante una computadora. La figura 17b) muestra estas curvas de nivel elevadas para obtener la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se transforman en trazas horizontales. En la figura 17 aparece cómo se ve la gráfica de h a partir de las curvas de nivel.

TEC Visual 14.1B muestra la conexión entre las superficies y sus mapas de contorno.

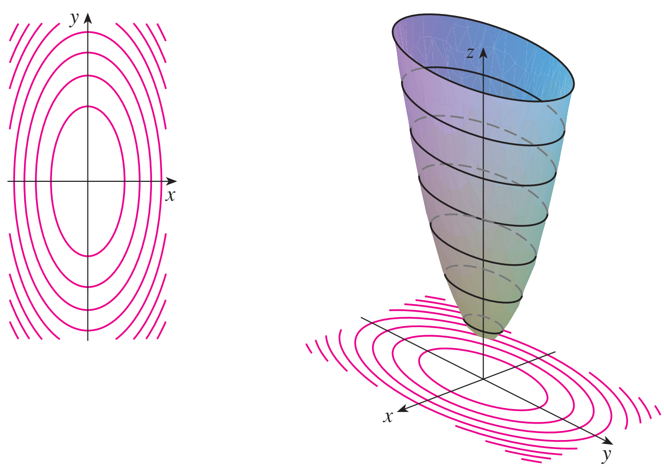


FIGURA 17
La gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ se forma elevando las curvas de nivel.

a) Mapa de contorno

b) Trazas horizontales, son curvas de nivel elevadas

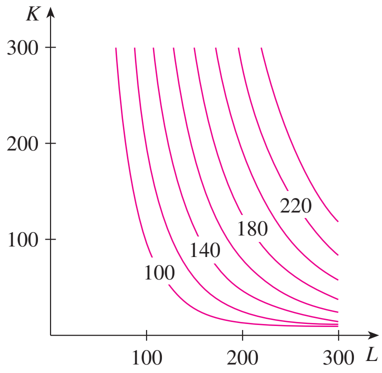


FIGURA 18

EJEMPLO 13 Trace curvas de nivel para la función de la producción de Cobb-Douglas del ejemplo 3.

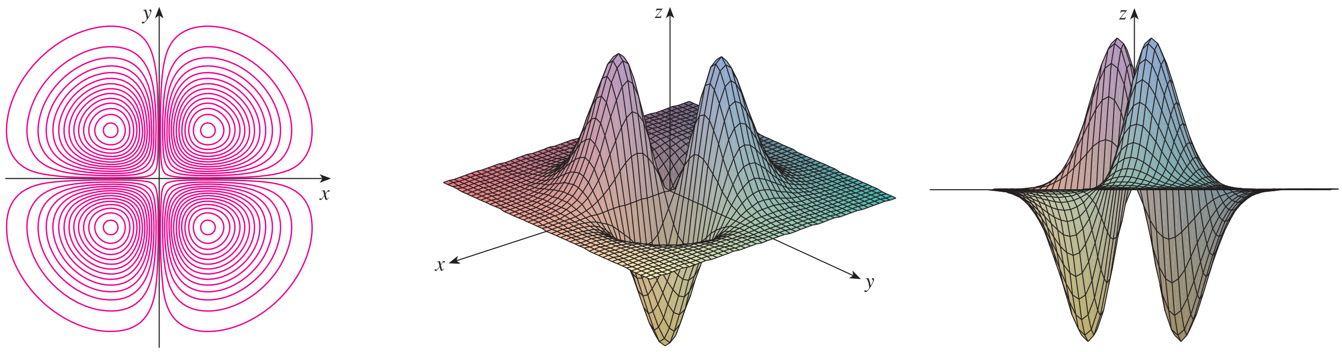
SOLUCIÓN En la figura 18 se ilustran las curvas que se obtuvieron mediante una computadora para la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

Las curvas de nivel se marcan con el valor de la producción P. Por ejemplo, la curva de nivel marcada con 140 muestra todos los valores de la mano de obra L y las inversiones de capital K que dan como resultado una producción de $P = 140$. En el caso de un valor fijo de P, cuando L se incrementa K disminuye, y viceversa.

Para algunos propósitos, un mapa de curvas de nivel es más útil que una gráfica. Esto es particularmente cierto en el ejemplo 13. (Compare la figura 18 con la figura 8.) También es válido estimar valores de las funciones, como en el ejemplo 9.

En la figura 19 se muestran algunas curvas de nivel obtenidas mediante computadora junto con sus gráficas correspondientes elaboradas de la misma manera. Observe que las curvas de nivel del inciso c) se agrupan cerca del origen. La razón es que la gráfica del inciso d) tiene una pendiente abrupta cerca del origen.



a) Curvas de nivel de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

b) Dos vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

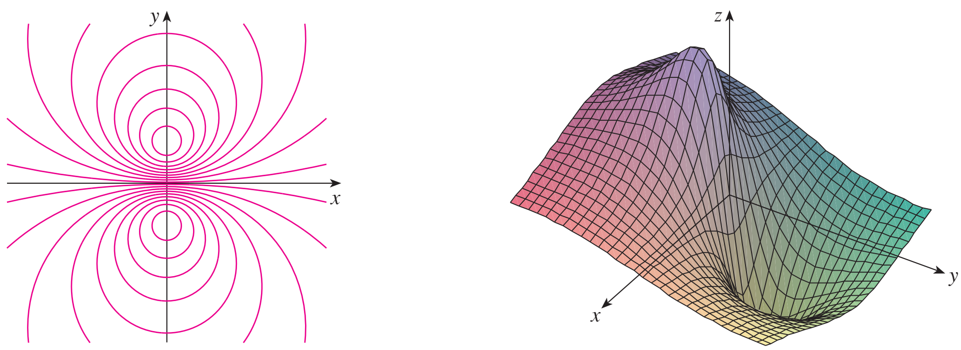


FIGURA 19

c) Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Funciones de tres o más variables

Una **función de tres variables**, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto sobre la superficie de la Tierra depende de la longitud x, latitud y del punto y del tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Encuentre el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida siempre que $z - y > 0$, de modo que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Es un **semiespacio** que consiste en todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$.

Es muy difícil imaginar una función f de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, es posible saber más de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ sigue estando fijo.

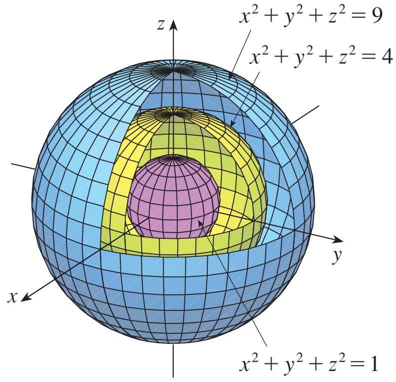


FIGURA 20

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geq 0$. Esto forma una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$ (véase figura 20). Así, cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O, el valor de $f(x, y, z)$ se conserva fijo.

También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una **función de *n* variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a una n-ada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reales. Denotamos con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-adas. Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i-ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de n variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algunas veces se usa una notación vectorial para escribir dichas funciones de una manera más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, con frecuencia se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mediante esta notación se vuelve a escribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

En vista de la correspondencia uno a uno entre los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ en V_n, hay tres formas de ver una función f definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Como una función de una sola variable en un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial única $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Los tres puntos de vista son útiles.

14.1 Ejercicios

1. En el ejemplo 2, se considera la función $W = f(T, v)$, donde W es el índice de temperatura de sensación, T es la temperatura real, y v es la rapidez del viento. Una representación numérica se proporciona en la tabla 1.

a) ¿Cuál es el valor de $f(-15, 40)$? ¿Cuál es su significado?

b) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de v es $f(-20, v) = -30$?". Luego conteste la pregunta.

c) Explique con sus propias palabras el significado de la pregunta "¿Para qué valor de T es $(T, 20) = -49$?". Luego conteste la pregunta.

d) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(-5, v)$? Describa el comportamiento de esta función.

e) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(T, 50)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. El *índice temperatura-humedad* I (o humidex, para abreviar) es la temperatura del aire que se percibe cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es h, de modo que es posible escribir $I = f(T, h)$. La tabla de valores siguiente de I es una parte de una tabla que elaboró la National Oceanic and Atmospheric Administration.

TABLA 3 Temperatura aparente como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F) T \ h	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

a) ¿Cuál es el valor de $f(95, 70)$? ¿Qué significa?

b) ¿Para qué valor de h es $f(90, h) = 100$?

c) ¿Para qué valor de T es $f(T, 50) = 88$?

d) ¿Cuál es el significado de las funciones $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de h.

3. Un fabricante ha modelado su producción anual como una función P (el valor monetario de toda su producción en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de mano de obra (en miles) y K es el capital invertido (en millones de dólares). Encuentre $P(120, 20)$ e interprételo.

4. Compruebe en el caso de la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

analizada en el ejemplo 3 que la producción se duplica si tanto la mano de obra como la cantidad de capital se duplican. Determine si ésta es también válida para la función general de la producción

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Un modelo para el área de la superficie del cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso (en libras), h es la altura (en pulgadas), y S es medida en pies cuadrados.

a) Encuentre $f(160, 70)$ e interprételo.

b) ¿Cuál es el área de su propio cuerpo?

6. El índice de temperatura de sensación W que se trata en el ejemplo 2 se modeló mediante la función siguiente

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Compruebe para ver qué tanto concuerda este modelo con los valores de la tabla 1 para unos pocos valores de T y v.

7. La altura h de las olas en mar abierto depende de la rapidez v del viento y del tiempo t en que el viento ha estado soplando con esa rapidez. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en pies en la tabla 4.

a) ¿Cuál es el valor de $f(40, 15)$? ¿Qué significa?

b) ¿Cuál es el significado $h = f(30, t)$? Describa el comportamiento de esta función.

c) ¿Cuál es el significado $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

TABLA 4

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

8. Una compañía fabrica tres tipos de cajas de cartón: pequeñas, medianas y grandes. El costo para elaborar una caja pequeña es

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com de \$2.50, para la mediana es de \$4.00 y \$4.50 para la caja grande. Los costos fijos son de \$8000.

a) Exprese el costo de elaborar x cajas pequeñas, y cajas medianas y z cajas grandes como una función de tres variables: $C = f(x, y, z)$.

b) Encuentre $f(3000, 5000, 4000)$ e interprételo.

c) ¿Cuál es el dominio de f?

9. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

a) Evalúe $g(2, -1)$.

b) Encuentre el dominio de g.

c) Determine el rango de g.

10. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

a) Evalúe $F(3, 1)$.

b) Determine y trace el dominio de F.

c) Determine el rango de F.

11. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Evalúe $f(1, 1, 1)$.

b) Determine y describa el dominio de f.

12. Sea $g(x, y, z) = x^3y^2z\sqrt{10 - x - y - z}$.

a) Evalúe $g(1, 2, 3)$.

b) Determine y describa el dominio de g.

13-22 Determine y grafique el dominio de la función.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23-31 Trace la gráfica de la función.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

32. Haga corresponder la función con su gráfica (marcadas de I a VI). Dé razones por su elección.

a) $f(x, y) = |x| + |y|$

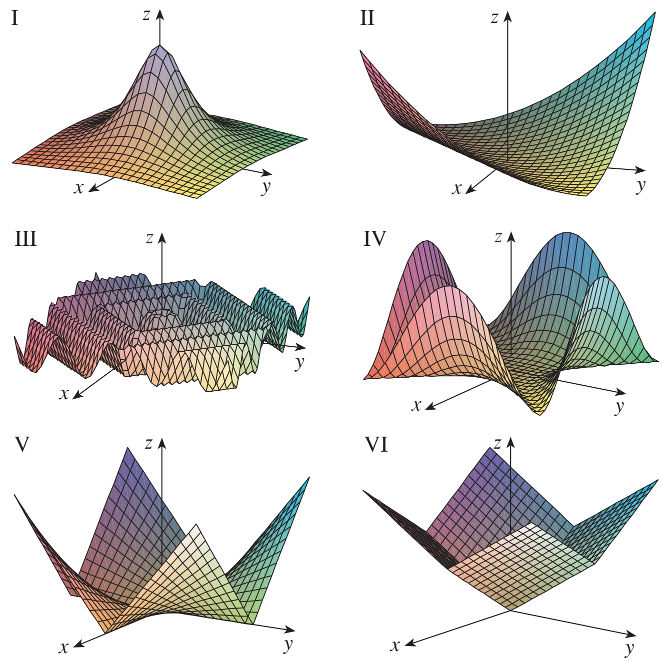
b) $f(x, y) = |xy|$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

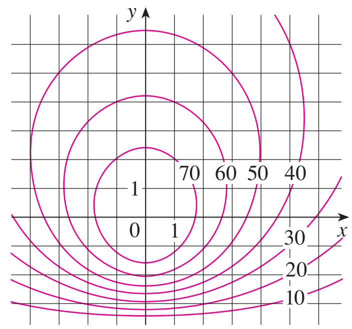
d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

e) $f(x, y) = (x - y)^2$

f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



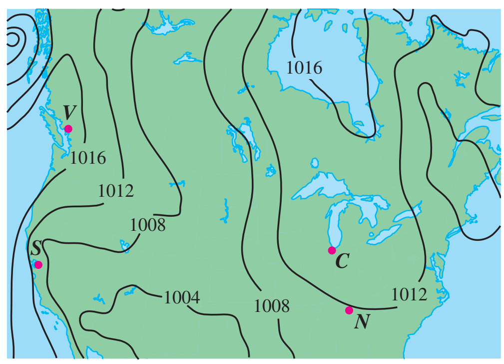
33. Se proporciona un mapa de contorno para una función f. Con éste estime los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?



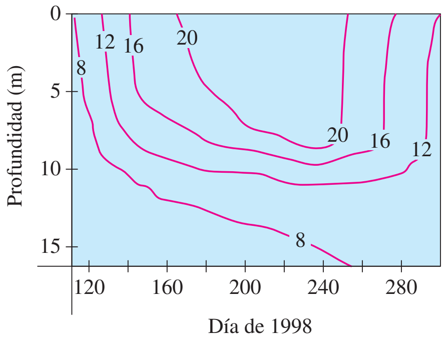
34. El contorno de la figura siguiente corresponde a la presión atmosférica en Norteamérica el 12 de agosto de 2008. Sobre las curvas de nivel (llamadas isobaras) la presión se indica en milibares (mb).

a) Estime la presión en C (Chicago), N (Nashville), S (San Francisco) y V (Vancouver).

b) ¿En cuáles de estos lugares el viento es más fuerte?

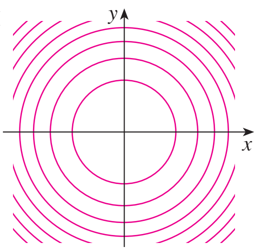


35. Se muestran las curvas de nivel (isotermas) para la temperatura del agua (en °C) en Long Lake (Minnesota) en 1998 como una función de la profundidad y el tiempo en años. Estime la temperatura en el lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 m y el 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 m.

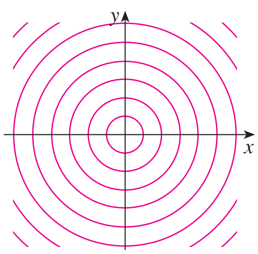


36. Se proporcionan dos mapas de contorno. Uno es para una función f cuya gráfica es un cono. El otro es para una función g cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál es cuál y por qué?

I

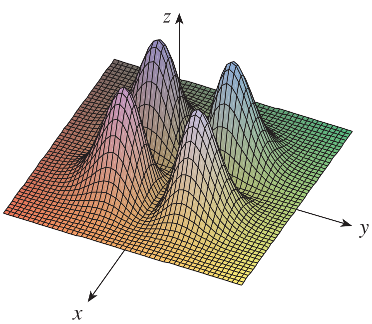


II



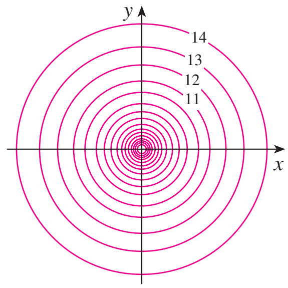
37. Localice los puntos A y B en el mapa de Lonesome Mountain (figura 12). ¿Cómo describiría el terreno cerca de A? ¿Y cerca de B?

38. Elabore un esquema aproximado de un mapa de contorno para la función cuya gráfica se muestra.

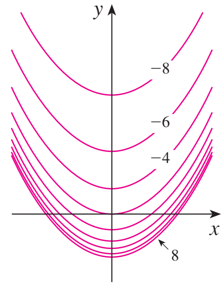


39-42 Se muestra un mapa de contorno de una función. Apóyese en él para elaborar un esquema aproximado de la gráfica de f.

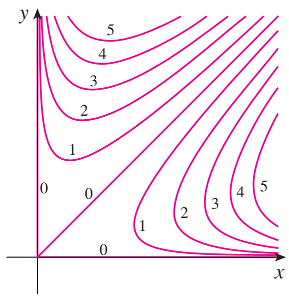
39.



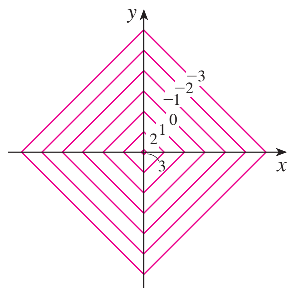
40.



41.



42.



43-50 Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51-52 Trace ambos mapas de contorno y grafique la función y compárelos.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Una plancha delgada de metal, situada en el plano xy, está a una temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y). Las curvas de nivel de T se llaman *isotermas* porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre la curva. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*, porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

55-58 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y desde distintos puntos de vista. Imprima una de esas vistas que, según su opinión, sea muy buena. Si el programa que usted maneja también genera curvas de nivel, grafique algunas curvas de nivel de la misma función y compárelas con la gráfica.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (silla de mono)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (silla de perro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\operatorname{sen}(x^2) + \cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59-64 Relacione la función a) con su gráfica (gráficas marcadas de A a F y b) con su mapa de contorno (mapas marcados de I a VI). Dé sus razones por qué hizo esa elección.

59. $z = \operatorname{sen}(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

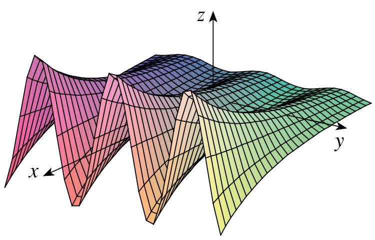
61. $z = \operatorname{sen}(x - y)$

62. $z = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$

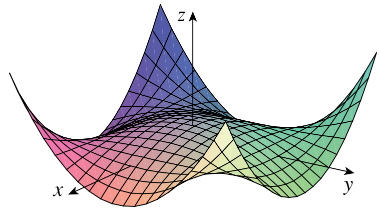
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

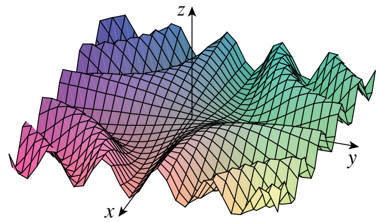
A



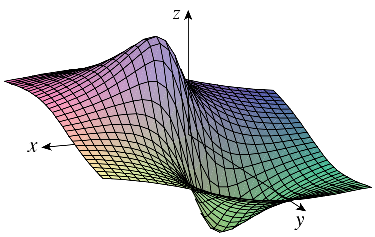
B



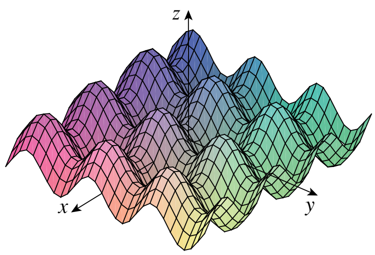
C



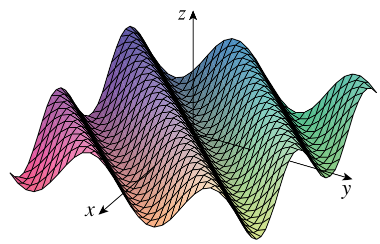
D



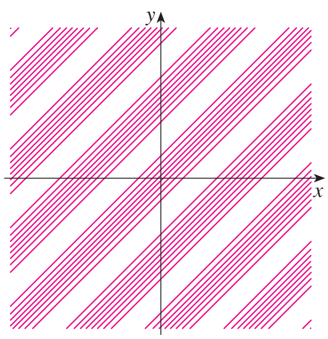
E



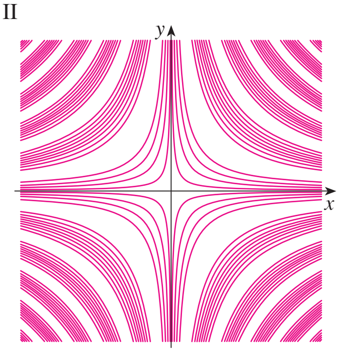
F



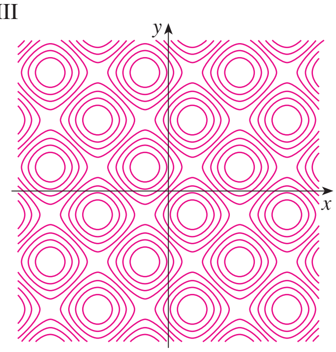
I



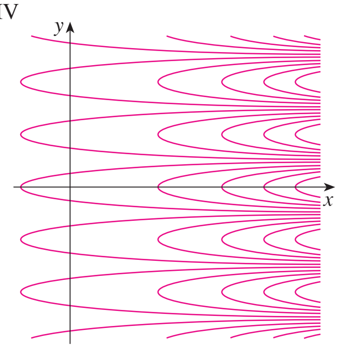
II



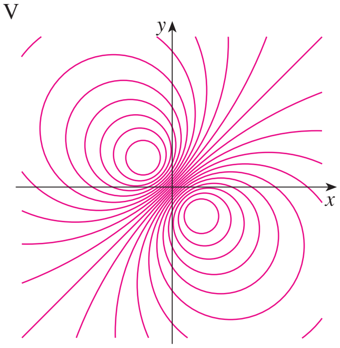
III



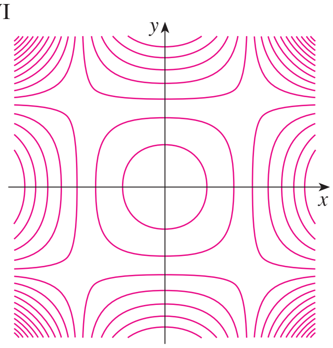
IV



V



VI



65-68 Describa las superficies de nivel de la función.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69-70 Describa cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

69. a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$
b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
c) $g(x, y) = -f(x, y)$
d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$
b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71-72 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y desde varias perspectivas. Imprima una vista en la que se vean claramente los "picos y los valles". ¿Diría usted que la función tiene un valor máximo? ¿Puede identificar algunos puntos en la gráfica que pudiera considerar como "puntos máximos relativos"? ¿Y "puntos mínimos relativos"?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73-74 Con la ayuda de una computadora, grafique la función usando varios dominios y desde diferentes puntos de vista. Analice el comportamiento límite de la función. ¿Qué sucede cuando tanto x como y se incrementan? ¿Qué sucede cuando (x, y) se aproxima al origen?

73. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

74. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Investigue mediante una computadora la familia de las funciones $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. ¿En qué manera depende de c la forma de la gráfica?

76. Use una computadora para investigar la familia de superficies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

¿De qué modo depende la forma de la gráfica de los números a y b?

77. Use una computadora para investigar la familia de superficies $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, debe determinar los valores de transición de c para los que la superficie cambia de un tipo de superficie cuádrica a otro.

78. Grafique las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En general, si g es una función de una variable, ¿cómo es la gráfica de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

obtenida a partir de la gráfica de g?

79. a) Demuestre que, al calcular logaritmos, la función de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ se puede expresar como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

b) Si hacemos $x = \ln(L/K)$ y $y = \ln(P/K)$, la ecuación en el inciso a) se transforma en la ecuación lineal $y = \alpha x + \ln b$. Use la tabla 2 del ejemplo 3 para elaborar una tabla de valores de $\ln(L/K)$ y $\ln(P/K)$ para los años 1899 a 1922. Luego utilice una calculadora graficadora o una computadora para determinar la recta de regresión de mínimos cuadrados que pase por los puntos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

c) Deduzca que la función de la producción según Cobb-Douglas es $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

14.2 Límites y continuidad

Comparemos el comportamiento de las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

cuando x y y tienden a 0 [por lo tanto, el punto (x, y) se aproxima al origen].

Las tablas 1 y 2 muestran valores de $f(x, y)$ y $g(x, y)$, con una aproximación de tres cifras decimales, para los puntos (x, y) cerca del origen. (Observe que ninguna función está definida en el origen.)

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Al parecer, cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, los valores de $f(x, y)$ se aproximan a 1, en tanto que los valores de $g(x, y)$ no tienden a ningún número. Resulta entonces que estas conjeturas basadas en la evidencia numérica son correctas, por lo que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ no existe}$$

En general, usamos la notación

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) tiende al punto (a, b) que está en cualquier trayectoria que se encuentra dentro del dominio de f. En otras palabras, podemos hacer los valores de $f(x, y)$ tan cercanos a L como queramos haciendo el punto (x, y) lo suficientemente cercano al punto (a, b), pero no igual a (a, b). Una definición más exacta se presenta a continuación.

1 Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, decimos que el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L y escribimos

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Otras notaciones para el límite en la definición 1 son

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \text{ cuando } (x, y) \to (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Por lo tanto, la definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. En la figura 1 se ilustra la definición 1 mediante un diagrama de flechas. Si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces podemos encontrar un disco D_δ con centro en (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mapea todos los puntos en D_δ [excepto tal vez (a, b)] en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

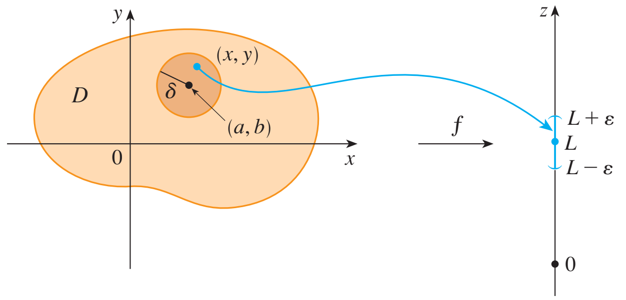


FIGURA 1

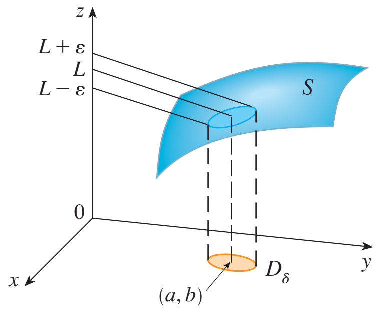


FIGURA 2

Otra ilustración de la definición 1 se muestra en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si $\varepsilon > 0$ está dada, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si (x, y) está restringido a quedar en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S queda entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

En el caso de funciones de una sola variable, cuando hacemos que x tienda a a, hay sólo dos posibles direcciones de aproximación, por la izquierda o por la derecha. De acuerdo con el capítulo 2, si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to a}$ no existe.

En el caso de funciones de dos variables, la situación no es tan sencilla, porque puede hacer que (x, y) tiendan a (a, b) desde un infinito de direcciones de cualquier manera (véase figura 3) siempre que (x, y) permanezca dentro del dominio de f.

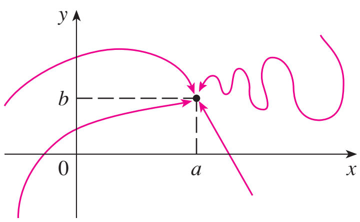


FIGURA 3

La definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña, haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. La definición se refiere sólo a la *distancia* entre (x, y) y (a, b). No se refiere a la dirección de aproximación. Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x, y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x, y) se aproxima a (a, b). Por lo tanto, si encontramos dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se infiere que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1, y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe.

V EJEMPLO 1 Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero nos aproximamos a $(0, 0)$ por el eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para toda $x \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Ahora nos aproximamos por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to -1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

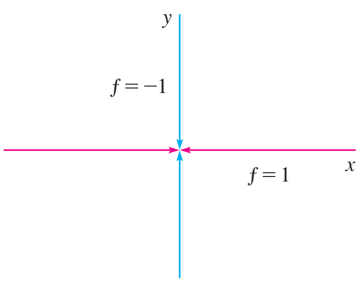


FIGURA 4

(Véase figura 4.) Puesto que f tiene dos límites diferentes a lo largo de dos rectas distintas, el límite dado no existe. [Esto confirma la conjetura hecha con base en evidencia numérica al principio de esta sección.]

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por lo tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, así que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

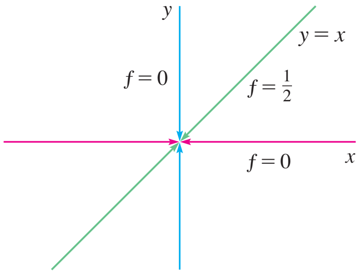


FIGURA 5

Aunque hemos obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea 0. Aproximémonos a (0, 0) a lo largo de otra recta, digamos, $y = x$. Para toda $x \neq 0$.

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\qquad f(x, y) \to \frac{1}{2} \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ por $y = x$

(Véase figura 5.) Puesto que hemos obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe.

La figura 6 arroja alguna luz en el ejemplo 2. La cresta que se forma por arriba de la recta $y = x$ corresponde al hecho de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos los puntos (x, y) en esa recta, excepto en el origen.

TEC En Visual 14.2, una recta que gira en la superficie de la figura 6 muestra diferentes límites en el origen a partir de distintas direcciones.

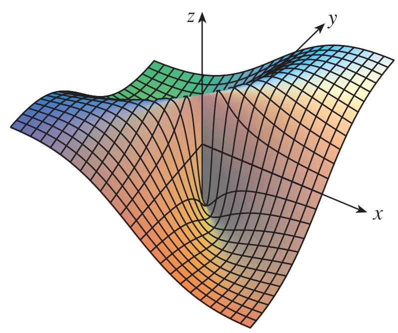


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Con la solución del ejemplo 2 en mente, tratemos de ahorrar tiempo haciendo $(x, y) \to (0, 0)$ por cualquier recta no vertical que pase por el origen. Entonces, $y = mx$, donde m es la pendiente y

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

De este modo $\qquad f(x, y) \to 0 \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $y = mx$

Por lo tanto, f tiene el mismo valor límite a lo largo de toda recta no vertical que pase por el origen. Pero esto no demuestra que el límite dado sea 0, porque si hacemos $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, tenemos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función del ejemplo 3. Observe que hay una cresta por encima de la parábola $x = y^2$.

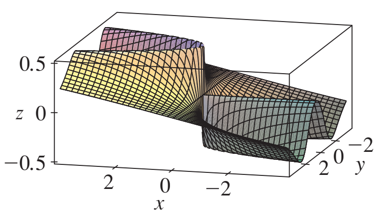


FIGURA 7

por lo que $\qquad f(x, y) \to \frac{1}{2} \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $x = y^2$

Puesto que por distintas trayectorias se obtienen diferentes valores límite, el límite dado no existe.

Observe ahora los límites que *sí* existen. Justo como en el caso de las funciones de una variable, el cálculo de límites de las funciones de dos variables se puede simplificar en gran medida mediante el uso de las propiedades de los límites. Las leyes de los límites que se listan en la sección 2.3, se pueden generalizar a las funciones de dos variables: el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites, y así sucesivamente. En particular, las ecuaciones siguientes son válidas

$$\boxed{2} \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$$

El teorema de compresión también se cumple.

EJEMPLO 4 Calcule $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 3, demuestre que el límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen es 0. Esto no demuestra que el límite dado sea 0, pero los límites a lo largo de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ también resultan ser 0, de modo que sospechamos que el límite existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Se busca determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

es decir, $\qquad$ si $\quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad$ entonces $\quad \dfrac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$

Pero $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ porque $y^2 \geqslant 0$, de modo que $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$\boxed{3} \qquad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto, si elegimos $\delta = \varepsilon/3$ y hacemos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Otro modo de resolver el ejemplo 4 es aplicar el teorema de compresión en lugar de la definición 1. De $\boxed{2}$ se infiere que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} 3|y| = 0$$

y entonces la primera desigualdad de $\boxed{3}$ muestra que el límite dado es 0.

De aquí que, según la definición 1,

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Continuidad

Recuerde que es fácil evaluar los límites de funciones *continuas* con una variable. Se realiza sustituyendo en forma directa porque la propiedad que define una función continua es $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables se definen también por medio de la propiedad de sustitución.

4 Definición Una función f de dos variables se llama **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Decimos que f es **continua sobre D** si f es continua en todos los puntos (a, b) en D.

El significado intuitivo de continuidad es que si el punto (x, y) cambia una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia una pequeña cantidad. Esto significa que una superficie que es la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni grietas.

Al aplicar las propiedades de los límites, podemos ver que las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas son continuas sobre sus dominios. Se usa este hecho para dar ejemplos de funciones continuas.

Una **función polinomial de dos variables** (o polinomial, para abreviar), es una suma de términos de la forma cx^my^n, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomiales. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es una función polinomial, mientras

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

es una función racional.

Los límites en $\boxed{2}$ demuestran que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = c$ son continuas. Puesto que cualquier polinomial se puede conformar con las funciones simples f, g y h mediante multiplicación o adición, se infiere que *todas las polinomiales son continuas sobre* $\mathbb{R}^2$. De igual manera, cualquier función racional es continua sobre su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es una polinomial y es continua, entonces se puede encontrar el límite mediante la sustitución directa:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

EJEMPLO 6 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en $(0, 0)$ porque allí no está definida. Puesto que f es una función racional, es continua sobre su dominio, que es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

EJEMPLO 7 Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí g se define en $(0, 0)$ pero g es discontinua ahí porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ no existe (véase ejemplo 1).

En la figura 8 se muestra la gráfica de la función continua del ejemplo 8.

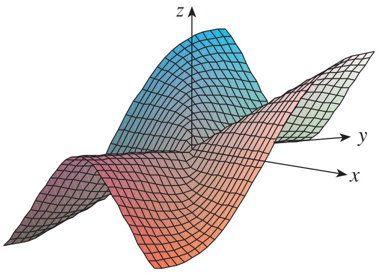


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$ puesto que es igual a una función racional. Asimismo, según el ejemplo 4

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Por lo tanto, f es continua en $(0, 0)$ y entonces es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

Igual que en el caso de una función de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, se puede demostrar que si f es una función continua de dos variables y g es una función continua de una variable que está definida en el rango de f, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es también una función continua.

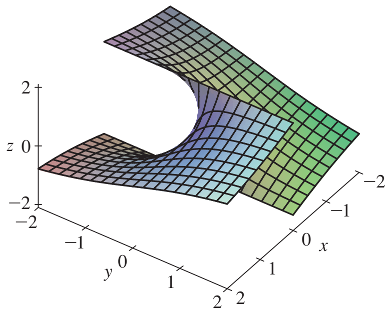


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua donde $x = 0$.

EJEMPLO 9 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional y por lo tanto continua, excepto sobre la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Entonces la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto donde $x = 0$. La gráfica de la figura 9 muestra una grieta en la gráfica de h arriba del eje y.

Funciones de tres o más variables

Todo lo que hemos visto en esta sección se puede generalizar a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) tiende al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, podemos escribir la definición exacta como sigue: para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces} \quad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

es una función racional de tres variables, y entonces es continua en todos los puntos en $\mathbb{R}^3$, excepto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En otras palabras, es discontinua sobre la esfera con centro en el origen y radio 1.

Si usamos la notación vectorial introducida al final de la sección 14.1, entonces podemos escribir la definición de límite para funciones de dos o tres variables en una sola forma compacta como sigue.

$\boxed{5}$ Si f se define sobre un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que si $n = 1$, entonces $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{a} = a$, y $\boxed{5}$ es justamente la definición de un límite para funciones de una variable. Para el caso $n = 2$, tenemos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$, y $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que $\boxed{5}$ se transforma en la definición 1. Si $n = 3$, entonces $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, y $\boxed{5}$ se vuelve la definición de un límite de una función de tres variables. En cada caso, la definición de continuidad se puede escribir como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Ejercicios

1. Suponga que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. ¿Qué puede decir respecto al valor de $f(3, 1)$? ¿Y si f es continua?

2. Explique por qué cada una de las funciones es continua o discontinua.
a) La temperatura en el exterior como función de la longitud, latitud y tiempo.
b) Elevación (altura sobre el nivel del mar) en función de la longitud, latitud y tiempo.
c) El costo de un viaje en taxi en función de la distancia recorrida y el tiempo.

3-4 Mediante una tabla de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) cerca del origen plantee alguna conjetura acerca del valor del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Luego explique por qué su conjetura es correcta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$ **6.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x + y)$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ **8.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2 x}{x^4 + y^4}$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\,\text{sen}^2 x}{x^4 + y^4}$ **12.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **14.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$ **16.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,\text{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ **18.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2}\tan(xz)$

20. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Mediante una computadora, grafique la función para explicar por qué el límite no existe.

23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ **24.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Encuentre $h(x, y) = g(f(x, y))$ y el conjunto en el cual h es continua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Grafique la función y observe dónde es discontinua. Luego use la fórmula para explicar lo que ha observado.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

30. $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

32. $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \tan^{-1}\left((x + y)^{-2}\right)$

35. $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 + z^2)$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}\ln z$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) con $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. Al inicio de esta sección se consideró la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

y se conjeturó que $f(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ con base en evidencia numérica. Use coordenadas polares para confirmar el valor del límite. Luego grafique la función.

43. Grafique y discuta la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

44. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

a) Demuestre que $(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria que pase por $(0, 0)$ de la forma $y = mx^a$ con $a < 4$.

b) No obstante el inciso a), demuestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

c) Demuestre que f es discontinua sobre dos curvas enteras.

45. Demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Si $\mathbf{c} \in V_n$, demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas parciales

En un día caluroso la humedad extrema hace pensar que la temperatura es mayor de lo que en realidad es, en tanto que si el aire está muy seco, parece que la temperatura es más baja de lo que señala el termómetro. El National Weather Service de Estados Unidos ha diseñado el *índice calorífico*, que se denomina también índice de temperatura-humedad o humidex en algunos países, para describir los efectos combinados de temperatura y humedad. El índice calorífico I es la temperatura del aire que se siente cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es H. De este modo, I es una función de T y H y se puede escribir como $I = f(T, H)$. La tabla siguiente de valores de I es parte de una tabla que elaboró el National Weather Service de Estados Unidos.

TABLA 1
Índice calorífico I en función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Si nos concentramos en la columna resaltada de la tabla, la cual corresponde a la humedad relativa de $H = 70\%$, está considerando el índice calorífico como una función de la variable única T para un valor fijo de H. Escribimos $g(T) = f(T, 70)$. Entonces $g(T)$ describe cómo el índice calorífico I se incrementa cuando la temperatura real T se incrementa cuando la humedad relativa es de 70%. La derivada de g cuando $T = 96$ °F es la razón de cambio de I con respecto a T cuando $T = 96$ °F:

$$g'(96) = \lim_{h \to 0} \frac{g(96 + h) - g(96)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96 + h, 70) - f(96, 70)}{h}$$

Aproximamos $g'(96)$ usando los valores de la tabla 1 y tomando $h = 2$ y -2:

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3.5$$

Al promediar los valores, la derivada $g'(96)$ es aproximadamente 3.75. Esto quiere decir que cuando la temperatura real es de 96 °F y la humedad relativa es 70%, la temperatura aparente (índice calorífico) se eleva casi 3.75 °F ¡por cada grado que aumenta la temperatura real!

Ahora veamos el renglón resaltado de la tabla 1, el cual corresponde a la temperatura fija de $T = 96$ °F. Los números de este renglón son valores de la función $G(H) = f(96, H)$, la cual describe cómo el índice calorífico aumenta cuando la humedad relativa H se incrementa cuando la temperatura real es $T = 96$ °F. La derivada de esta función cuando $H = 70\%$ es la razón de cambio de I con respecto a H cuando $H = 70\%$:

$$G'(70) = \lim_{h \to 0} \frac{G(70 + h) - G(70)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96, 70 + h) - f(96, 70)}{h}$$

Si hacemos $h = 5$ y -5, aproximamos a $G'(70)$ usando los valores de la tabla:

$$G'(70) \approx \frac{G(75) - G(70)}{5} = \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65) - G(70)}{-5} = \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{-5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0.8$$

Al promediar estos valores obtenemos la estimación $G'(70) \approx 0.9$. Esto establece que, cuando la temperatura es de 96 °F y la humedad relativa es de 70%, el índice calorífico se eleva casi 0.9 °F por cada punto porcentual que aumenta la humedad relativa.

En general, si f es una función de dos variables x y y, supongamos que sólo hacemos variar x mientras mantenemos fija a y, digamos $y = b$, donde b es una constante. Entonces estamos considerando en realidad una función de una sola variable x, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene derivada en a, entonces se denomina **derivada parcial de f con respecto a x en (a, b)** y la denotamos con $f_x(a, b)$. Por consiguiente

1 $$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)}$$

De acuerdo con la definición de derivada, tenemos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

y entonces la ecuación 1 se transforma en

2 $$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

De igual manera, la **derivada parcial de f con respecto a y en (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, se obtiene al mantener fija la variable x ($x = a$) y determinar la derivada ordinaria de b de la función $G(y) = f(a, y)$:

3 $$\boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}$$

Con esta notación de derivadas parciales, podemos escribir las razones de cambio del índice calorífico I con respecto a la temperatura real T y humedad relativa H cuando $T = 96$ °F y $H = 70\%$ como sigue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75 \qquad\qquad f_H(96, 70) \approx 0.9$$

Si ahora dejamos que el punto (a, b) varíe en las ecuaciones 2 y 3, f_x y f_y se transforman en funciones de dos variables.

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Hay muchas otras notaciones para las derivadas parciales. Por ejemplo, en lugar de f_x puede escribir f_1 o $D_1 f$ para indicar la derivación respecto a la *primera* variable, o bien, $\partial f/\partial x$. Pero aquí $\partial f/\partial x$ no se puede interpretar como una razón de diferenciales.

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que debe hacer es recordar que, según la ecuación 1, la derivada parcial con respecto a x es justamente la derivada *ordinaria* de la función g de una sola variable que se obtiene al mantener fija a y. Por lo tanto, tenemos la regla siguiente.

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

SOLUCIÓN Al considerar como constante a y y derivar con respecto a x se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

y entonces

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Si consideramos como constante a x y derivamos con respecto a y entonces

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Interpretaciones de derivadas parciales

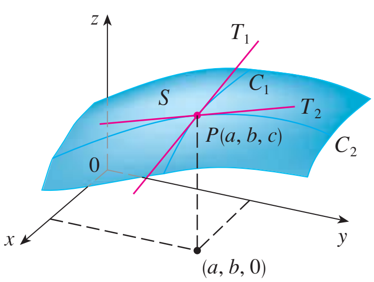


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está situado sobre S. Si hace $y = b$, está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ interseca a S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$). De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca a S en una curva C_2. Tanto la curva C_1 como C_2 pasan por el punto P (véase figura 1).

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, de modo que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$.

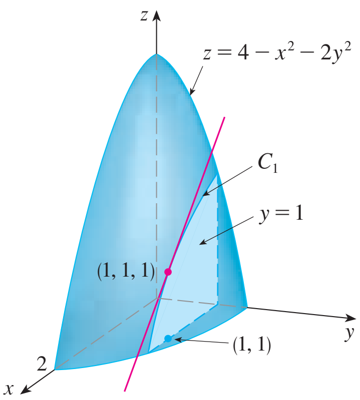


FIGURA 2

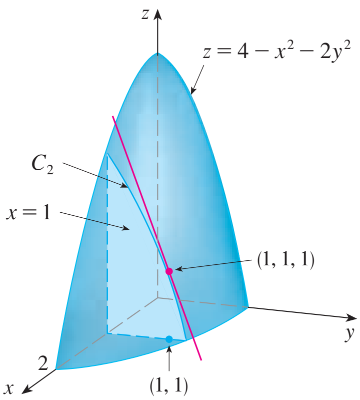


FIGURA 3

Como ya se vio en el caso de la función del índice calorífico, las derivadas parciales también se pueden interpretar como *razones de cambio*. Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ representa la razón de cambio de z respecto a x cuando y permanece constante. De manera similar, $\partial z/\partial y$ representa la razón de cambio de z respecto a y cuando x es constante.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete estos números como pendientes.

SOLUCIÓN Tenemos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ lo interseca en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Al igual que en el análisis anterior, es C_1 en la figura 2.) La pendiente de la recta tangente de esta parábola en el punto (1, 1, 1) es $f_x(1, 1) = -2$. De la misma manera, la curva C_2 que se forma cuando el plano $x = 1$ interseca al paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, y la pendiente de la tangente en (1, 1, 1) es $f_y(1, 1) = -4$ (véase figura 3).

La figura 4 se generó mediante computadora y es análoga a la figura 2. En el inciso a) se ilustra el plano $y = 1$ que interseca a la superficie para formar la curva C_1 y en el inciso b) se muestra C_1 y T_1. [Hemos usado las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 y $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] Asimismo, la figura 5 corresponde a la figura 3.

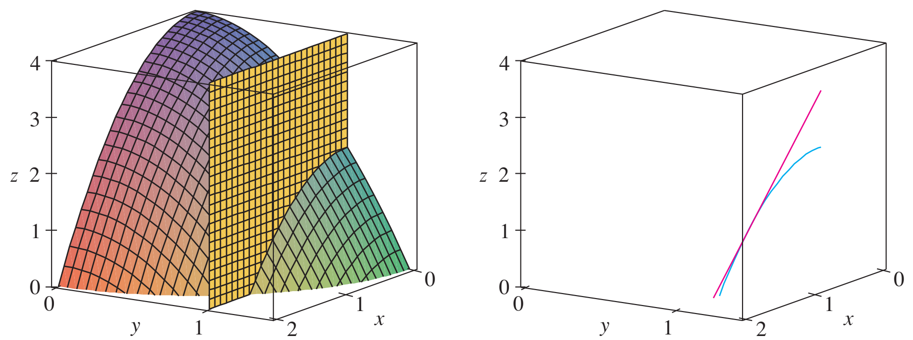


FIGURA 4 a) b)

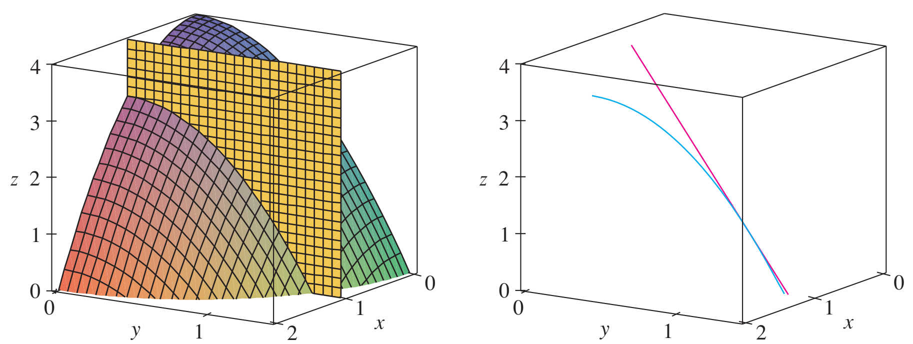


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1 + y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Al aplicar la regla de la cadena para funciones de una variable

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{1}{1 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{x}{(1 + y)^2}$$

Algunos sistemas algebraicos computarizados tienen la capacidad de dibujar superficies definidas por ecuaciones implícitas con tres variables. En la figura 6 se presenta una gráfica de la superficie definida por la ecuación del ejemplo 4.

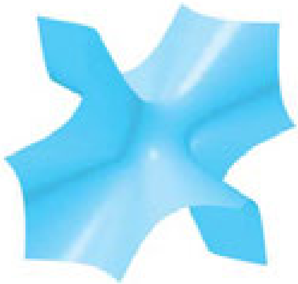


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si z se define implícitamente como una función de x y y mediante la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUCIÓN Para determinar $\partial z/\partial x$, derivamos en forma implícita con respecto a x, teniendo cuidado de tratar a y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $\partial z/\partial x$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

De manera similar, la derivación implícita respecto a y da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Funciones de más de dos variables

También se pueden definir las derivadas parciales para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z, entonces su derivada parcial con respecto a x se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando $f(x, y, z)$ con respecto a x. Si $w = f(x, y, z)$, entonces $f_x = \partial w/\partial x$ se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a x cuando y y z se mantienen constantes. Pero no podemos hacer una interpretación geométrica porque la gráfica de f se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones.

En general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la i-ésima variable x_i es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

y también escribimos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 5 Determine f_x, f_y y f_z, si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUCIÓN Si mantenemos constantes a y y z y derivamos respecto a x, tenemos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

De manera similar, $\qquad f_y = xe^{xy} \ln z \qquad$ y $\qquad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que se consideran sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, que se llaman **segundas derivadas parciales** de f. Si $z = f(x, y)$, usamos la notación siguiente:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Por lo tanto, la notación f_{xy} (o bien, $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$) significa que primero se deriva respecto a x y después respecto a y, y que al calcular f_{xy} el orden es el inverso.

EJEMPLO 6 Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 encontramos que

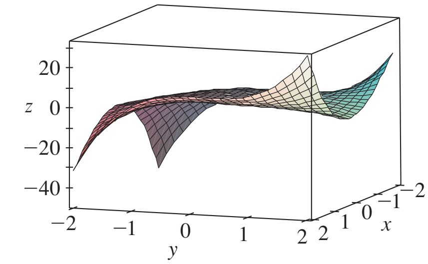
$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Por lo tanto,

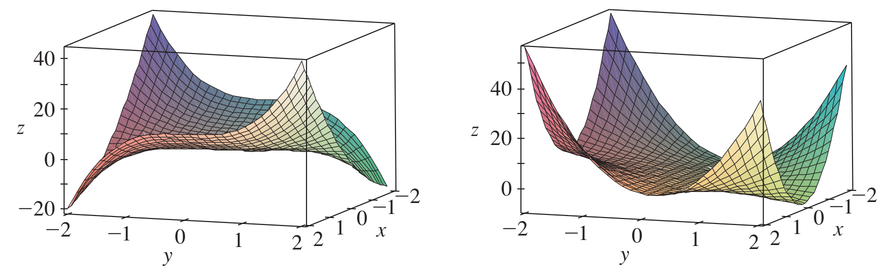
$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

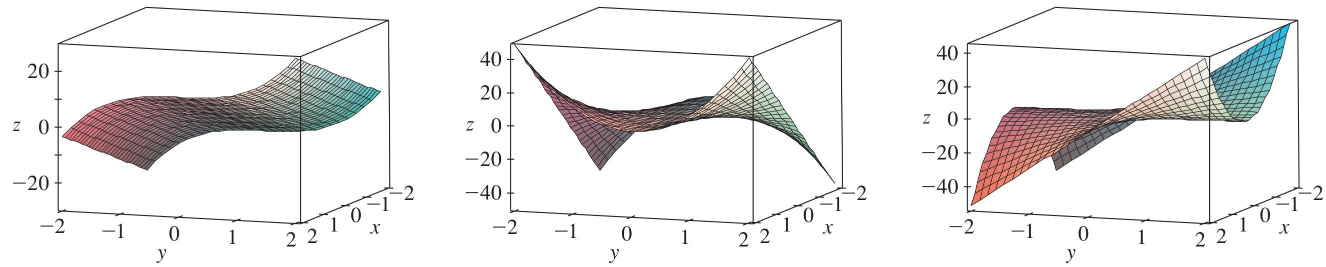
En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función f del ejemplo 6 y las gráficas de su primera y segunda derivadas parciales para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Observe que estas gráficas son congruentes con la interpretación de f_x y f_y y las pendientes de las tangentes a las trazas de la gráfica de f. Por ejemplo, la gráfica de f decrece si inicia en $(0, -2)$ y se desplaza en la dirección positiva de x. Esto se refleja en los valores negativos de f_x. Compare las gráficas de f_{yx} y f_{yy}, con la gráfica de f_y para ver las relaciones.



f



f_x f_y



f_{xx} $f_{xy} = f_{yx}$ f_{yy}

FIGURA 7

Observemos que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 6. Esto no es una coincidencia. Resulta que las derivadas parciales combinadas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayoría de las funciones que uno encuentra en la práctica. El teorema siguiente, el cual fue descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), presenta las condiciones en las cuales es posible afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. La demostración se proporciona en el apéndice F.

Clairaut

Alexis Clairaut fue un niño prodigio en matemática. Estudió el libro de texto de l'Hospital sobre cálculo cuando tenía 10 años y presentó un trabajo sobre geometría en la Academia Francesa de las Ciencias cuando tenía 13 años. A la edad de 18 publicó *Recherches sur les courbes à double courbure*, que fue el primer tratado sistemático sobre geometría analítica del espacio; entre otras cosas, presentaba el cálculo de curvas tridimensionales.

Teorema de Clairaut Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Las derivadas parciales de orden 3 o superiores también se pueden definir. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

y mediante el teorema de Clairaut se puede demostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si estas funciones son continuas.

V EJEMPLO 7 Calcule f_{xxyz} si $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

SOLUCIÓN

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\,\text{sen}(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz)$$

Ecuaciones diferenciales parciales

En las *ecuaciones diferenciales parciales* que expresan ciertas leyes físicas aparecen derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama **ecuación de Laplace** en honor a Pierre Laplace (1749-1827). Las soluciones de esta ecuación reciben el nombre de **funciones armónicas**, y desempeñan un importante papel en los problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

EJEMPLO 8 Demuestre que la función $u(x, y) = e^x \,\text{sen}\, y$ es una solución de la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN Primero calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

$$u_x = e^x \,\text{sen}\, y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \,\text{sen}\, y \qquad u_{yy} = -e^x \,\text{sen}\, y$$

Así que

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \,\text{sen}\, y - e^x \,\text{sen}\, y = 0$$

Por lo tanto, u satisface la ecuación de Laplace.

La **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

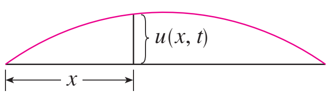


FIGURA 8

describe el movimiento de una onda, que puede ser una ola de mar, una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja por una cuerda que vibra. Por ejemplo, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento de una cuerda de violín que está vibrando en el tiempo t y a una distancia x de un extremo de la cuerda (como se ilustra en la figura 8), entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda. En este caso la constante a depende de la densidad y de la tensión de la cuerda.

EJEMPLO 9 Compruebe que la función $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

SOLUCIÓN

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_t = -a\cos(x - at)$$

$$u_{xx} = -\text{sen}(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\,\text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

De este modo u satisface la ecuación de onda.

Las ecuaciones diferenciales parciales involucran funciones de tres variables que son muy importantes en ciencia e ingeniería. La ecuación de Laplace en tres dimensiones es

$$\boxed{5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y un caso de frecuente aplicación se da en la Geofísica. Si $u(x, y, z)$ representa la intensidad de campo magnético en una posición (x, y, z), entonces satisface la ecuación 5. La intensidad de campo magnético indica la distribución de minerales ricos en hierro y refleja diferentes tipos de rocas y la localización de fallas. La figura 9 muestra un mapa de contorno del campo magnético terrestre registrado desde un avión equipado con un magnetómetro y volando a 200 m por encima de la superficie terrestre. El mapa de contorno es mejorado por un codificador de color de las regiones entre las curvas de nivel.

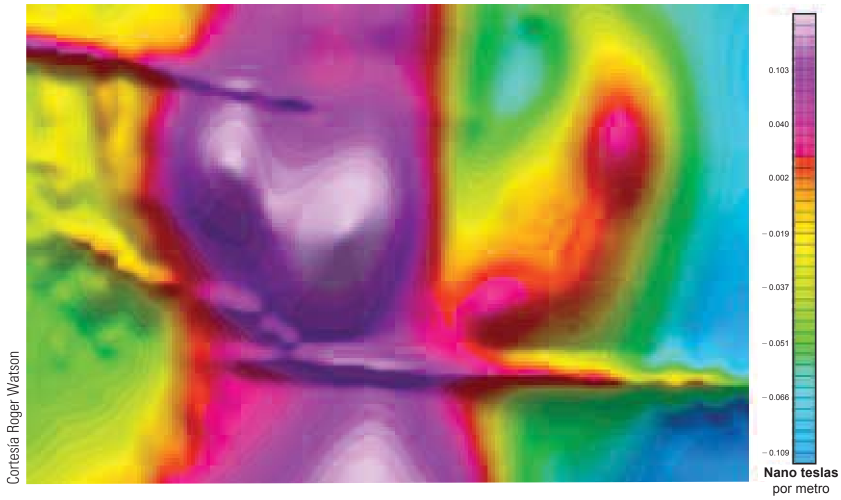


FIGURA 9
Intensidad del campo magnético de la Tierra

La figura 10 muestra un mapa de contorno para la derivada parcial de segundo orden de u en la dirección vertical, u_{zz}. Debido a que los valores de las derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} son relativamente fáciles de medir en un mapa del campo magnético, los valores de u_{zz} pueden calcularse a partir de la ecuación de Laplace $\boxed{5}$.

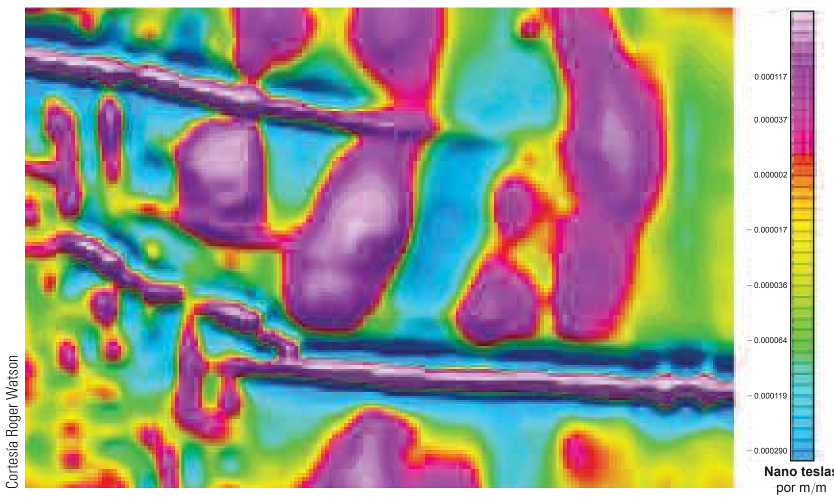


FIGURA 10
Segunda derivada vertical del campo magnético

La función de producción de Cobb-Douglas

En el ejemplo 3 de la sección 14.1, se describe el trabajo de Cobb y Douglas al modelar la producción total P de un sistema económico como una función de la cantidad de mano de obra L y la inversión de capital K. En este caso se utilizan derivadas parciales para demostrar cómo la forma particular del modelo se infiere de ciertas suposiciones que plantearon con respecto a la economía.

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, entonces la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón a la cual cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas la llaman producción marginal con respecto a la mano de obra o **productividad marginal de la mano de obra**. De manera similar, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se denomina **productividad marginal del capital**. En estos términos las suposiciones que plantearon Cobb y Douglas se pueden formular como sigue:

i) Si la mano de obra o el capital se desvanece, entonces sucede lo mismo con la producción.

ii) La productividad marginal de la mano de obra es proporcional a la cantidad de producción por unidad de mano de obra.

iii) La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Debido a que la producción por unidad de mano de obra es P/L, la suposición ii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguna constante α. Si mantenemos K constante ($K = K_0$), entonces esta ecuación diferencial parcial se vuelve una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L} \tag{6}$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial separable mediante los métodos de la sección 9.3 (véase también ejercicio 85), obtenemos

$$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha} \tag{7}$$

Observemos que la constante C_1 aparece como una función de K_0 porque puede depender del valor de K_0.

Igualmente, la suposición iii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y resolvemos esta ecuación diferencial para tener

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta} \tag{8}$$

Al comparar las ecuaciones 7 y 8, obtenemos

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta} \tag{9}$$

donde b es una constante que es independiente tanto de L como de K. La suposición i) muestra que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Observemos que según la ecuación 9, si la mano de obra y el capital se incrementan un factor m, entonces

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces $P(mL, mK) = mP(L, K)$, lo cual quiere decir que la producción también aumenta un factor de m. Ésta es la razón de que Cobb y Douglas supusieron que $\alpha + \beta = 1$ y, por lo tanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Ésta es la función de producción de Cobb-Douglas que estudiamos en la sección 14.1.

14.3 Ejercicios

1. La temperatura T (en °C) en un lugar del hemisferio norte depende de la longitud x, latitud y, y el tiempo t, de modo que podemos escribir $T = f(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas a partir del inicio de enero.

a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial t$?

b) Honolulu tiene una longitud de 158° W y una latitud de 21° N. Suponga que a las 9:00 AM el primero de enero, los vientos empujan aire caliente hacia el noreste, de modo que el aire del oeste y del sur es caliente y el aire al norte y el este es más frío. ¿Esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ y $f_t(158, 21, 9)$ sean positivas o negativas? Explique.

2. Al principio de esta sección, estudiamos la función $I = f(T, H)$, donde I es el índice calorífico, T la temperatura y H la hu medad relativa. Mediante la tabla 1 estime $f_T(92, 60)$ y $f_H(92, 60)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

3. El índice de temperatura de sensación W es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la rapidez del viento es v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla siguiente de valores es una parte de la tabla 1 de la sección 14.1.

Rapidez del viento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

a) Estime los valores de $f_T(-15, 30)$ y $f_v(-15, 30)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

b) En general, ¿qué puede decir con respecto a los signos de $\partial W/\partial T$ y $\partial W/\partial v$?

c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. La altura h de una ola en el mar abierto depende de la rapidez v del viento y de la cantidad de tiempo t que el viento ha estado soplando a esa rapidez. En la tabla siguiente se registran valores de la función $h = f(v, t)$ en pies.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

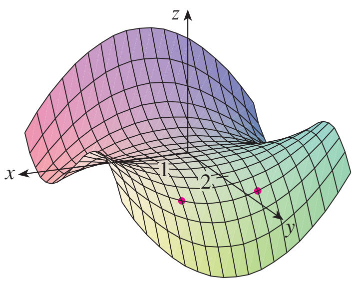
a) ¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?

b) Estime los valores de $f_v(40, 15)$ y $f_t(40, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine los signos de las derivadas parciales de la función f cuya gráfica se ilustra.



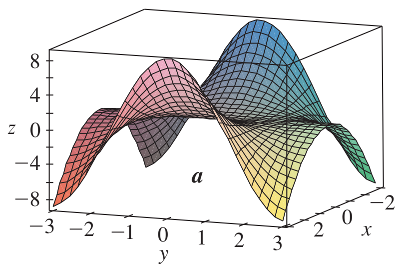
5. a) $f_x(1, 2)$ b) $f_y(1, 2)$

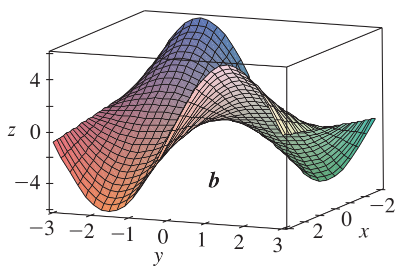
6. a) $f_x(-1, 2)$ b) $f_y(-1, 2)$

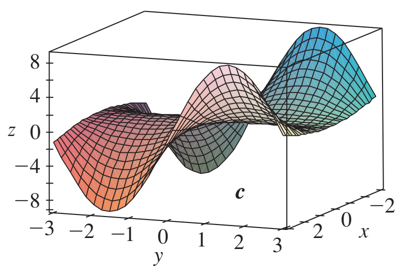
7. a) $f_{xx}(-1, 2)$ b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. a) $f_{xy}(1, 2)$ b) $f_{xy}(-1, 2)$

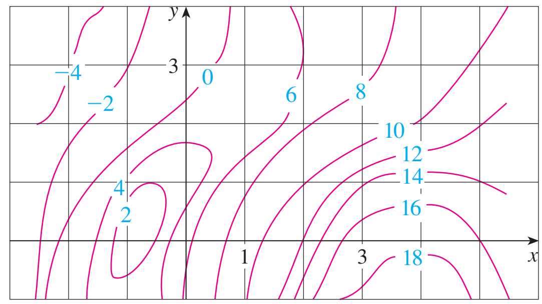
9. Las superficies siguientes, marcadas con a, b y c, son gráficas de una función f y de sus derivadas parciales f_x y f_y. Identifique cada superficie y explique el porqué de su elección.







10. Se presenta un mapa de contorno de una función f. Utilícela para estimar $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.



11. Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

12. Si $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$ e interprete estos valores como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

13-14 Encuentre f_x y f_y grafique f, f_x y f_y con dominios y desde perspectivas que le permitan ver las relaciones entre ellas.

13. $f(x, y) = x^2y^3$

14. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15-40 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

16. $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

17. $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$

18. $f(x, t) = \sqrt{x}\, \ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$

20. $z = \tan xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

23. $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$

24. $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

25. $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$

26. $u(r, \theta) = \operatorname{sen}(r\cos\theta)$

27. $R(p, q) = \tan^{-1}(pq^2)$

28. $f(x, y) = x^y$

29. $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(e^t)\, dt$

30. $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

31. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$

32. $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

34. $w = ze^{xyz}$

35. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$

36. $u = x^{y/z}$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$

38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

40. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41-44 Determine las derivadas parciales indicadas.

41. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

42. $f(x, y) = \arctan(y/x)$; $\quad f_x(2, 3)$

43. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $\quad f_y(2, 1, -1)$

44. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $\quad f_z(0, 0, \pi/4)$

45-46 Use la definición de las derivadas parciales como límites $\boxed{4}$ para determinar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

46. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47-50 Mediante derivación implícita determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$

50. $yz + x \ln y = z^2$

51-52 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

51. a) $z = f(x) + g(y)$ b) $z = f(x + y)$

52. a) $z = f(x)g(y)$ b) $z = f(xy)$
c) $z = f(x/y)$

53-58 Determine las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

54. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

56. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

57. $z = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

58. $v = e^{xe^y}$

59-62 Compruebe que la conclusión del teorema de Clairaut se cumple, es decir, $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63-70 Encuentre la derivada parcial indicada.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; $\quad f_{xxx}$, $\quad f_{xyx}$

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; $\quad f_{yxy}$

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; $\quad f_{xyz}$

66. $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st)$; $\quad g_{rst}$

67. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$; $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\, \partial \theta}$

68. $z = u\sqrt{v - w}$; $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

69. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$, $\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}$

70. $u = x^a y^b z^c$; $\quad \dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z^3}$

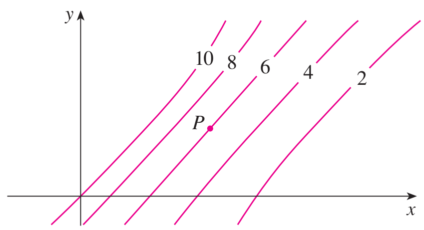
71. Si $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, obtenga f_{xzy}. [*Sugerencia:* ¿cuál orden de derivación es más fácil?]

72. Si $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, encuentre g_{xyz}. [*Sugerencia:* utilice un diferente orden de derivación para cada término.]

73. Con la tabla de valores de $f(x, y)$ estime los valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ y $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

74. Se muestran las curvas de nivel para una función f. Determine si las siguientes derivadas parciales son positivas o negativas en el punto P.
a) f_x b) f_y c) f_{xx}
d) f_{xy} e) f_{yy}



75. Compruebe que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ es una solución de *la ecuación de la conducción de calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
a) $u = x^2 + y^2$ b) $u = x^2 - y^2$
c) $u = x^3 + 3xy^2$ d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Demuestre que cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$ b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Si f y g son funciones de una sola variable derivables dos veces, demuestre que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda del ejercicio 78.

80. Si $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

82. La temperatura en un punto (x, y) en una plancha de metal plana está dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, donde T se mide en °C y x, y en metros. Calcule la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto (2, 1) en a) la dirección de x y b) la dirección de y.

83. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en un circuito eléctrico en paralelo está definida por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Calcule $\partial R/\partial R_1$.

84. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción $P = bL^{\alpha}K^{\beta}$ satisface la ecuación

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción satisface $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Véase ecuación 6.)

86. Cobb y Douglas usaron la ecuación $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía americana de 1899 a 1922, donde L es la cantidad de mano de obra y K es la cantidad de capital (ver ejemplo 3 de la sección 14.1).

a) Calcule P_L y P_K.

b) Encuentre la productividad marginal de la mano de obra y la productividad marginal del capital en el año 1920, cuando $L = 194$ y $K = 407$ (comparado con los valores asignados $L = 100$ y $K = 100$ en 1899). Interprete los resultados.

c) En el año 1920, ¿qué producción tendría más beneficio, un incremento de inversión de capital o un incremento en el gasto en mano de obra?

87. La *ecuación de Van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V el volumen y T la temperatura del gas. La constante R es la constante universal del gas y a y b son constantes positivas características de un gas en particular. Calcule $\partial T/\partial P$ y $\partial P/\partial V$.

88. La ley de los gases para una masa fija m de un gas ideal a temperatura T, presión P y volumen V absolutos es $PV = mRT$, donde R es la constante de los gases. Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. En el caso del gas ideal para el ejercicio 88, demuestre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. El índice de temperatura de sensación se modela mediante la función

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (°C) y v es la rapidez del viento (km/h). Cuando $T = -15$ °C y $v = 30$ km/h, ¿cuánto esperaría con certeza usted que cayera la temperatura aparente W si la temperatura real disminuye 1 °C? ¿Y si la rapidez del viento se incrementa 1 km/h?

91. La energía cinética de un cuerpo cuya masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

92. Si a, b y c son los lados de un triángulo, y A, B y C son los ángulos opuestos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$, $\partial A/\partial c$ mediante la derivación implícita de la ley de los cosenos.

93. Le dicen que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debe creerlo?

94. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ interseca el plano $x = 1$ en una parábola. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Con una computadora grafique el paraboloide, la parábola y la tangente en la misma pantalla.

95. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ interseca el plano $y = 2$ en una elipse. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta elipse en el punto (1, 2, 2).

96. En un estudio de penetración del congelamiento se encontró que la temperatura T en el tiempo t (medido en días) a una profundidad x (medida en pies) se puede modelar con la función

$$T(x, t) = T_0 + T_1e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde $\omega = 2\pi/365$ y λ es una constante positiva.

a) Determine $\partial T/\partial x$. ¿Cuál es el significado físico?

b) Determine $\partial T/\partial t$. ¿Cuál es el significado físico?

c) Demuestre que T satisface con la ecuación del calor $T_t = kT_{xx}$ para una cierta constante k.

d) Si $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$ y $T_1 = 10$, mediante una computadora grafique $T(x, t)$.

e) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión sen $(\omega t - \lambda x)$?

97. Aplique el teorema de Clairaut para demostrar que si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas, entonces

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

98. a) ¿Cuántas derivadas parciales de n-ésimo orden tiene una función de dos variables?

b) Si estas derivadas parciales son continuas, ¿cuántas de ellas pueden ser distintas?

c) Responda el inciso a) para el caso de que la función sea de tres variables.

99. Si $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugerencia:* en lugar de hallar primero $f_x(x, y)$, observe que es más fácil aplicar la ecuación 1 o la ecuación 2.]

100. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

101. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Grafique f mediante una computadora.

b) Encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$.

c) Calcule $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ usando las ecuaciones 2 y 3.

d) Demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$.

SAC e) ¿El resultado del inciso d) contradice el teorema de Clairaut? Mediante gráficas de f_{xy} y f_{yx} ilustre su respuesta.

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales

Una de las ideas más importantes en el cálculo de una variable, es que a medida que se acerca a un punto de la gráfica de una función derivable, la gráfica se vuelve indistinguible desde su tangente y puede aproximarse a la función mediante una función lineal (véase sección 3.10). Ahora se desarrollan ideas similares en tres dimensiones. A medida que se acerca hacia un punto sobre la superficie que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie se parece más y más a un plano, su plano tangente, y es posible aproximarse a la función mediante una función lineal de dos variables. También se generaliza la idea de una diferencial a funciones de dos o más variables.

Planos tangentes

Suponga que una superficie S tiene por ecuación a $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S. Al igual que en la sección anterior, sea C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al intersecar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Entonces, el punto P se encuentra tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces, el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las rectas tangentes T_1 y T_2 (véase figura 1).

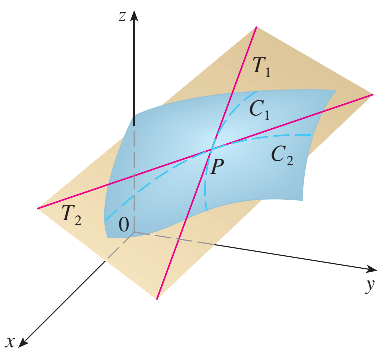


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

En la sección 14.6 veremos que si C es cualquier otra curva que queda en la superficie S y pasa por P, entonces su tangente en P también está en el plano tangente. Por lo tanto, podemos pensar que el plano tangente a S en P consiste de todas las tangentes posibles en P a curvas que quedan en S y pasan por P. El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca del punto P.

Sabemos, por la ecuación 12.5.7, que cualquier plano que pase por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación entre C y hacer $a = -A/C$ y $b = -B/C$, podemos escribirla en la forma

$$\boxed{1} \qquad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si la ecuación 1 representa el plano tangente en P, entonces su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1. Al hacer $y = y_0$ en la ecuación 1 obtenemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{donde } \; y = y_0$$

e identificamos estas expresiones como la ecuación de una recta (en la forma punto-pendiente) con pendiente a. Pero de acuerdo con la sección 14.3, sabemos que la pendiente de la recta tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De manera similar, al hacer $x = x_0$ en la ecuación 1, $z - z_0 = b(y - y_0)$, la cual debe representar a la recta tangente T_2, de modo que $b = f_y(x_0, y_0)$.

Observe la similitud entre las ecuaciones del plano tangente y de una recta tangente:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

2 Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

V EJEMPLO 1 Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Entonces $\boxed{2}$ da la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o bien,

$$z = 4x + 2y - 3$$

En la figura 2a) se ilustra el paraboloide elíptico y su plano tangente en $(1, 1, 3)$ determinado en el ejemplo 1. Los incisos b) y c) se acercan al punto $(1, 1, 3)$ restringiendo el dominio de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que se acerca, parece más plana la gráfica y más se asemeja a su plano tangente.

TEC En Visual 14.4 se pueden ver imágenes animadas de las figuras 2 y 3.

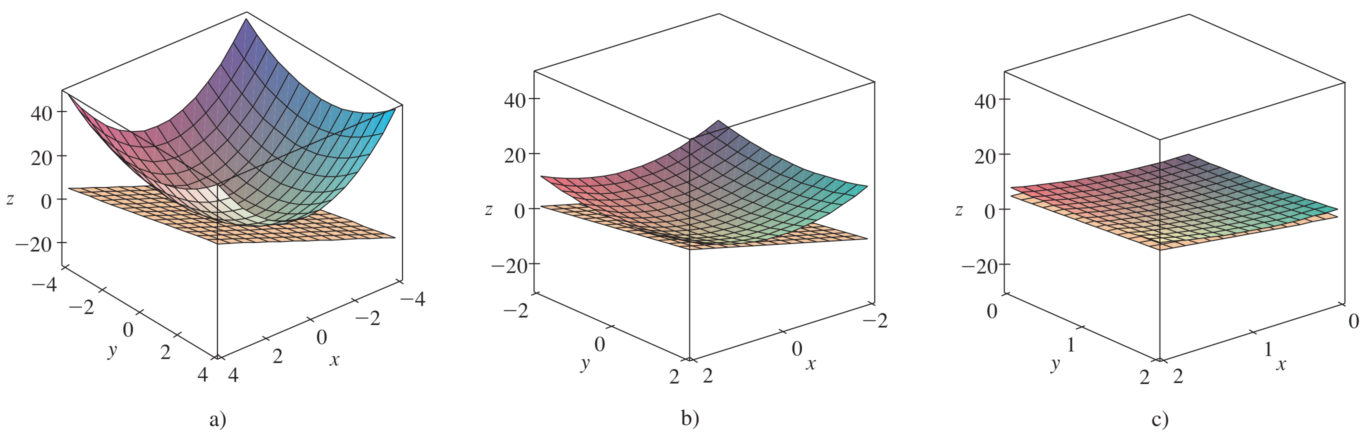


FIGURA 2 El paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir con su plano tangente a medida que se acerca a $(1, 1, 3)$.

En la figura 3 se comprueba esta impresión al acercarse al punto (1, 1) sobre un mapa de contorno de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que nos acercamos, las curvas de nivel se parecen más a rectas paralelas con igual separación, lo cual es característico de un plano.

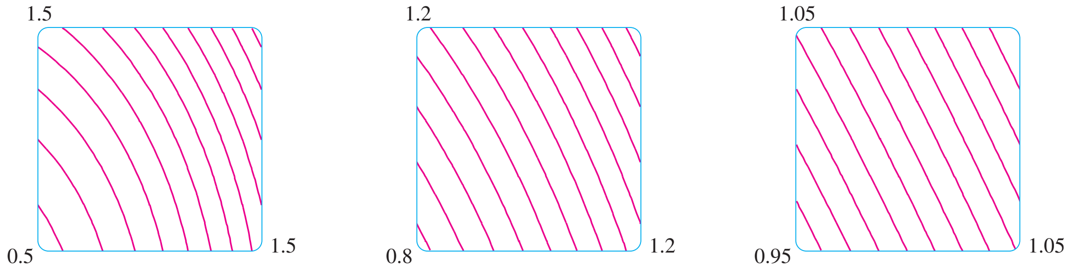


FIGURA 3
Acercamiento a (1, 1) en un mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Aproximaciones lineales

En el ejemplo 1 encontramos que una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) es $z = 4x + 2y - 3$. Por lo tanto, en vista de la evidencia de las figuras 2 y 3, la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

es una buena aproximación a $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (1, 1). La función L se conoce como *linealización* de f en (1, 1) y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

recibe el nombre de *aproximación lineal*, o bien, *aproximación del plano tangente* de f en (1, 1).

Por ejemplo, en el punto (1.1, 0.95) la aproximación lineal da

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

que es muy cercana al valor verdadero de $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero si tomamos un punto alejado de (1, 1), tal como (2, 3), ya no conseguimos una buena aproximación. En efecto, $L(2, 3) = 11$ y $f(2, 3) = 17$.

En general, sabemos a partir de $\boxed{2}$ que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, a saber,

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **linealización** de f en (a, b) y la aproximación

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b).

Ya hemos definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? En la figura 4 se ilustra tal función; su ecuación es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

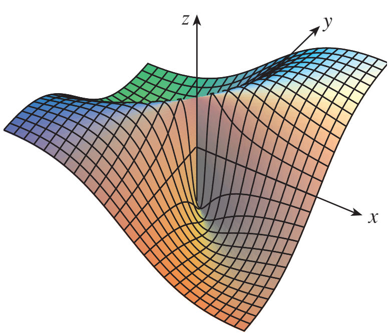


FIGURA 4
$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

Podemos comprobar (véase ejercicio 46) que existen sus derivadas parciales en el origen y, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos sobre la recta $y = x$. De este modo una función de dos variables se puede comportar erráticamente aun cuando ambas derivadas parciales existan. Para evitar dicho comportamiento, se plantea la idea de una función diferenciable de dos variables.

Recuerde que para una función de una variable, $y = f(x)$, si x pasa de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

En el capítulo 3 se demostró que si f es derivable en a, entonces

Ésta es la ecuación 3.4.7.

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x \to 0$$

Ahora consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y supongamos que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y pasa de b a $b + \Delta y$. Entonces el **incremento** correspondiente de z es

$$\boxed{6} \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Por consiguiente, el incremento Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogía con $\boxed{5}$ se define la diferenciabilidad de una función de dos variables como sigue.

$\boxed{7}$ **Definición** Si $z = f(x, y)$, entonces f es **diferenciable** en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0, 0)$.

La definición 7 establece que una función diferenciable es una para la cual la aproximación lineal $\boxed{4}$ es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). En otras palabras, el plano tangente se aproxima a la gráfica de f muy cerca al punto de tangencia.

Algunas veces es difícil aplicar directamente la definición 7 para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema siguiente proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

El teorema 8 se demuestra en el apéndice F.

$\boxed{8}$ **Teorema** Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

En la figura 5 se ilustran las gráficas de la función f y su linealización L del ejemplo 2.

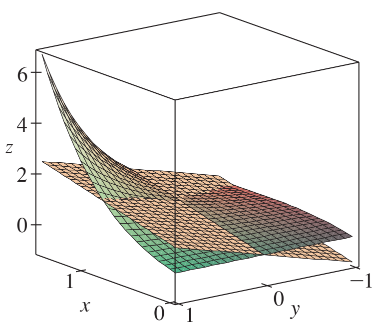


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x como f_y son funciones continuas, de modo que f es diferenciable según el teorema 8. La linealización es

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

La aproximación lineal correspondiente es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

de modo que $$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$$

Compare lo anterior con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$.

EJEMPLO 3 Al inicio de la sección 14.3, estudiamos el índice calorífico (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se presentó la tabla siguiente de valores del National Weather Service.

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Calcule una aproximación lineal para el índice calorífico $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 96 °F y H está cerca del 70%. Mediante ella estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 97 °F y la humedad relativa es 72%.

SOLUCIÓN En la tabla se ve que $f(96, 70) = 125$. En la sección 14.3 usamos los valores de la tabla para estimar que $f_T(96, 70) \approx 3.75$ y $f_H(96, 70) \approx 0.9$. (Véanse páginas 901 y 902.) Entonces, la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70) \\ &\approx 125 + 3.75(T - 96) + 0.9(H - 70) \end{aligned}$$

En particular,

$$f(97, 72) \approx 125 + 3.75(1) + 0.9(2) = 130.55$$

Por lo tanto, cuando $T = 97$ °F y $H = 72\%$, el índice calorífico es

$$I \approx 131 \text{ °F}$$

Diferenciales

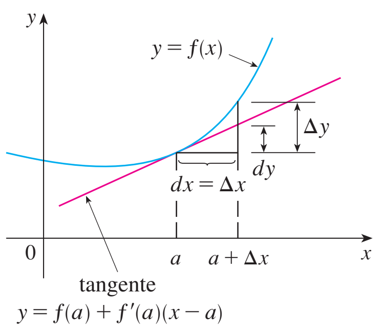


FIGURA 6

En el caso de una función derivable de una variable, $y = f(x)$, definimos la diferencial dx como una variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

$$\boxed{9} \qquad dy = f'(x)dx$$

(Véase sección 3.10.) En la figura 6 se muestra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio en altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio en altura de la tangente cuando x cambia una cantidad $dx = \Delta x$.

En el caso de una función diferenciable de dos variables, $z = f(x, y)$, definimos las **diferenciales** dx y dy como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial** dz, también conocida como **diferencial total**, se define como

$$\boxed{10} \qquad \boxed{dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy}$$

(Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación df en lugar de dz.

Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, entonces la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{4}$ se puede escribir como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura 7 es el equivalente tridimensional de la figura 6 y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y del incremento Δz: dz representa el cambio en altura del plano tangente, y Δz representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

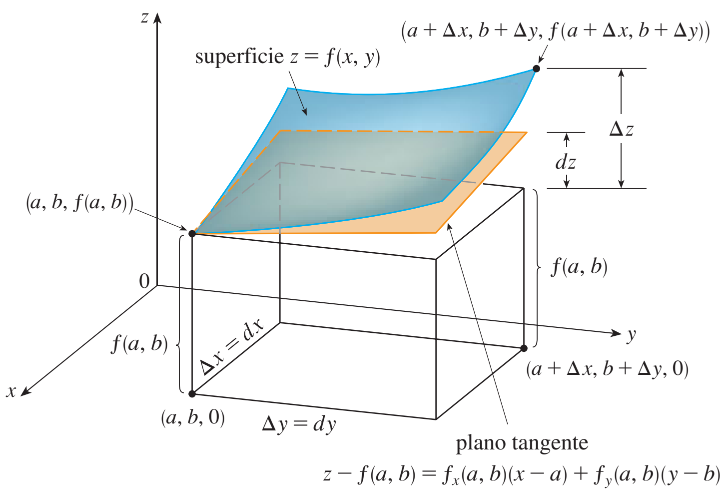


FIGURA 7

En el ejemplo 4, dz está cerca de Δz porque el plano tangente es una buena aproximación a la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$ cerca de (2, 3, 13). (Véase figura 8.)

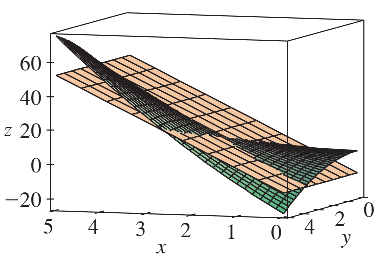


FIGURA 8

V EJEMPLO 4

a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.

b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y pasa de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN

a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = (2x + 3y)\, dx + (3x - 2y)\, dy$$

b) Si hacemos $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ y $dy = \Delta y = -0.04$, obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Observemos que $\Delta z \approx dz$ pero dz es más fácil de calcular.

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono de radio en la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. De modo que la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Puesto que cada error es de 0.1 cm como máximo, tenemos $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para estimar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de r y de h, entonces $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Por lo tanto, el error máximo en el volumen calculado es de casi 20π cm$^3 \approx 63$ cm^3.

Funciones de tres o más variables

Se pueden definir de manera similar las aproximaciones lineales, la diferenciabilidad y las diferenciales para funciones de más de dos variables. Una función diferenciable se define como una expresión similar a la definición 7. Para tales funciones la **aproximación lineal** es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el segundo miembro de esta expresión. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

La **diferencial** dw se define en función de las diferenciales de dx, dy y dz de las variables independientes

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

SOLUCIÓN Si las dimensiones de la caja son x, y y z, entonces su volumen es $V = xyz$ por lo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Sabemos que $|\Delta x| \leq 0.2$, $|\Delta y| \leq 0.2$ y $|\Delta z| \leq 0.2$. Por lo tanto, para estimar el error más grande en el volumen, utilizamos $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $dz = 0.2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

Por consiguiente, un error de sólo 0.2 cm al medir cada una de las dimensiones podría llevar a un error de ¡tanto como 1980 cm^3 en el volumen calculado! Esto parecería un gran error, pero sólo es alrededor de 1% del volumen de la caja.

14.4 Ejercicios

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2, -1, -3)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$

4. $z = xe^{xy}$, $(2, 0, 2)$

5. $z = x \operatorname{sen}(x + y)$, $(-1, 1, 0)$

6. $z = \ln(x - 2y)$, $(3, 1, 0)$

7-8 Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. Elija el dominio y el ángulo desde donde obtenga una buena vista de la superficie y del plano tangente. Luego efectúe un acercamiento hasta donde la superficie y el plano tangente se vuelven indistinguibles.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

8. $z = \arctan(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

SAC **9-10** Grafique f y su plano tangente en el punto dado. (Use un sistema computarizado de álgebra para calcular las derivadas parciales y para graficar la superficie y su plano tangente.) Luego efectúe un acercamiento hasta donde la superficie y el plano tangente se vuelven indistinguibles.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $(1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $(1, 1, 3e^{-0.1})$

11-16 Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$, $(2, 3)$

12. $f(x, y) = x^3y^4$, $(1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $(2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y$, $(\pi, 0)$

16. $f(x, y) = y + \operatorname{sen}(x/y)$, $(0, 3)$

17-18 Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que f es una función diferenciable con $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

20. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ en $(1, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Grafique f y su plano tangente.

21. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

22. La altura h de una ola en el mar abierto, depende de la rapidez v del viento y del tiempo t en que ha estado soplando el aire a esa rapidez. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en la tabla siguiente. Con ayuda de la tabla, determine una aproximación lineal a la función de la altura de la ola cuando v está cerca de 40 nudos y t es casi de 20 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 24 h a 43 nudos.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

23. Mediante la tabla del ejemplo 3, determine una aproximación lineal para la función del índice calorífico cuando la temperatura se acerca a 94 °F y la humedad relativa es de casi 80%. Luego estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 95 °F y la humedad relativa es de 78%.

24. El índice de temperatura de sensación W es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la rapidez del viento v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es tan sólo una parte de la tabla 1 de la sección 14.1. Con esta tabla determine una aproximación lineal a la función del índice de temperatura de sensación cuando T es casi de -15 °C y v es casi de 50 km/h. Después estime este mismo índice cuando la temperatura es -17 °C y la rapidez del viento es de 55 km/h.

Velocidad del viento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

25-30 Determine la diferencial de la función.

25. $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \gamma$

30. $L = xze^{-y^2 - z^2}$

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.

32. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de $(3, -1)$ a $(2.96, -0.95)$, compare los valores de Δz y dz.

33. El largo y el ancho de un rectángulo miden 30 cm y 24 cm respectivamente, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

34. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0.1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0.05 cm de espesor.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 cm y altura de 12 cm si el estaño tiene 0.04 cm de espesor.

36. El índice de temperatura de sensación está modelado por la función

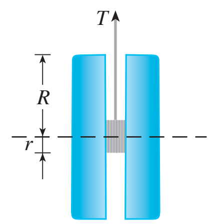
$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (en °C) y v es la rapidez del viento (en km/h). La rapidez del viento es medida como 26 km/h, con un posible error de ± 2 km/h y la temperatura es medida como -11 °C, con un posible error de ± 1 °C. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de W debido a errores en la medición de T y v.

37. La tensión T en la cuerda del yo-yo en la figura es

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

donde m es la masa del yo-yo y g es la aceleración debida a la gravedad. Utilice diferenciales para estimar el cambio en la tensión si R es incrementada de 3 cm a 3.1 cm y r es incrementada de 0.7 cm a 0.8 cm ¿La tensión crece o decrece?



38. La presión, volumen y temperatura de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en kelvin. Mediante diferenciales determine el cambio aproximado en la presión si el volumen pasa de 12 litros a 12.3 litros y la temperatura disminuye de 310 K a 305 K.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ y $R_3 = 50\ \Omega$ con un posible error de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Cuatro números positivos, cada uno menor de 50, se redondean a la primera cifra decimal, y luego se multiplican todos. Mediante diferenciales, estime el error máximo posible en el producto calculado que podría resultar por el redondeo.

41. Un modelo para el área superficial de un cuerpo humano está dado por $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso (en libras), h es la estatura (en pulgadas), y S se mide en pies cuadrados. Si los errores en la medición de w y h son a lo sumo un 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área superficial calculada.

42. Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tenemos una ecuación para S pero sabemos que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

43-44 Demuestre que la función es diferenciable determinando los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la definición 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demuestre que si f es una función de dos variables que es diferenciable en (a, b), entonces f es continua en (a, b).

Sugerencia: demuestre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se grafica en la figura 4. Demuestre que existen tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$. [*Sugerencia:* use el resultado del ejercicio 45.]

b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

14.5 Regla de la cadena

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones derivables, entonces y es indirectamente una función derivable de t y

1
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como una función de t. Supongamos que f es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

2 **Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DEMOSTRACIÓN Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y Δy en y. Éstos, a su vez, producen un cambio de Δz en z, y de acuerdo con la definición de 14.4.7 tenemos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en $(0, 0)$, podemos definir que son 0 allí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt, tenemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora hacemos $\Delta t \to 0$, $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ porque g es derivable y, por lo tanto, continua. De igual manera, $\Delta y \to 0$. A su vez, esto significa que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Como se escribe a menudo $\partial z/\partial x$ en lugar de $\partial f/\partial x$, podemos volver a escribir la regla de la cadena en la forma

Observe la similitud con la definición de la diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \operatorname{sen} 2t$ y $y = \cos t$, determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

No es necesario escribir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$ tenemos $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

La derivada del ejemplo 1 se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se desplaza por la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$ (véase figura 1). En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón del incremento cuando uno se desplaza por la curva C que pasa por el punto $(0, 1)$. Si, por ejemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), entonces la función compuesta $z = T(\operatorname{sen} 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos sobre C y la derivada dz/dt representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de C.

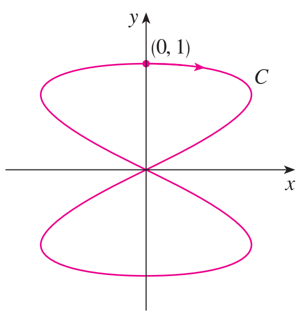


FIGURA 1
La curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

V EJEMPLO 2 La presión P, en kilopascales, el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvin), de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0.1 K/s y el volumen es de 100 L y se incrementa a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31 \frac{T}{V}$$

con la regla de la cadena

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

La presión disminuye a razón de casi 0.042 kPa/s.

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada x y y es una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y deseamos hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantenemos fija a s y calculamos la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 Regla de la cadena (caso 2) Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$

El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Observe que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia, y cada uno de estos términos es similar a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.

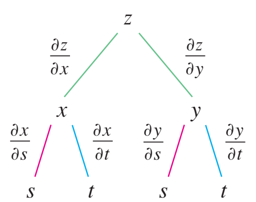


FIGURA 2

Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego dibujamos ramas desde x y y a las variables independientes s y t. En cada rama escribimos la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calculamos el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta s y luego sumamos los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

De la misma manera determinamos $\partial z/\partial t$ mediante las trayectorias de z a t.

Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

4 Regla de la cadena (versión general) Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

V EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

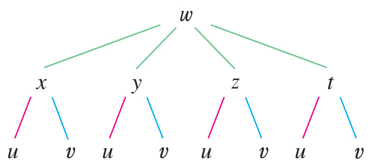


FIGURA 3

SOLUCIÓN Utilice el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, podemos escribir las expresiones necesarias:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

V EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

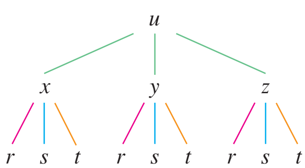


FIGURA 4

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$, y $t = 0$, tenemos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que g satisface la ecuación

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena dan

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por lo tanto,

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule a) $\partial z/\partial r$ y b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

b) Al aplicar la regla del producto a la expresión en el inciso a) obtenemos

5
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

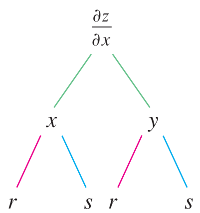


FIGURA 5

Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura 5), llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Derivación implícita

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se empezó a tratar en las secciones 3.5 y 14.3. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F

es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Para deducir esta ecuación, suponemos que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, que se demuestra en cálculo avanzado, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si F se define sobre un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas sobre el disco, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

de modo que la ecuación 6 da como resultado

La solución del ejemplo 8 se debe comparar con la del ejemplo 2 de la sección 3.5.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7 de la página 930. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Una vez más, una versión del **teorema de la función implícita** da condiciones en las cuales la suposición es válida. Si F está definida dentro de una esfera que contiene (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera, entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por $\boxed{7}$.

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 7, tenemos

La solución del ejemplo 9 se debe comparar con la del ejemplo 4 de la sección 14.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

14.5 Ejercicios

1-6 Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

4. $z = \tan^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = \tan t$

7-12 Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r \cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \tan(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Si $z = f(x, y)$, donde f es derivable,

$$\begin{array}{ll} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4 \\ f_x(2, 7) = 6 & f_y(2, 7) = -8 \end{array}$$

determine dz/dt cuando $t = 3$.

14. Sea $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde F, u y v son derivables,

$$\begin{array}{ll} u(1, 0) = 2 & v(1, 0) = 3 \\ u_s(1, 0) = -2 & v_s(1, 0) = 5 \\ u_t(1, 0) = 6 & v_t(1, 0) = 4 \\ F_u(2, 3) = -1 & F_v(2, 3) = 10 \end{array}$$

Determine $W_s(1, 0)$ y $W_t(1, 0)$.

15. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Mediante la tabla de valores del ejercicio 15 calcule $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

17-20 Mediante un diagrama de árbol, escriba la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son derivables.

17. $u = f(x, y)$, donde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, donde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, donde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, donde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21-26 Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

21. $z = x^4 + x^2y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ donde $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$

22. $T = \dfrac{v}{2u + v}$, $u = pq\sqrt{r}$, $v = p\sqrt{q}r$;

$\dfrac{\partial T}{\partial p}, \dfrac{\partial T}{\partial q}, \dfrac{\partial T}{\partial r}$ donde $p = 2$, $q = 1$, $r = 4$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = r\theta$;

$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ donde $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;

$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ donde $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;

$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ donde $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;

$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ donde $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27-30 Aplique la ecuación 6 para encontrar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \mathrm{sen}\,y$

29. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y\,\mathrm{sen}\,x = x + xy$

31-34 Con las ecuaciones 7 halle $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

36. La producción de trigo en un año dado, W, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de 0.15 °C/año, y que la precipitación está disminuyendo a razón de 0.1 cm/año. También estiman que, a niveles de producción actuales, $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.

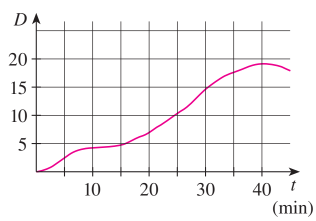
a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?

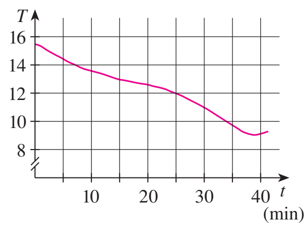
b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo, dW/dt.

37. La velocidad del sonido que viaja a través del agua del mar con salinidad de 35 partes por millar, está modelada por la ecuación

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T es la temperatura (en grados celsius) y D es la profundidad por abajo de la superficie del mar (en metros). Un buzo en escafandra autónoma empieza a sumergirse en el agua del mar; la profundidad del buzo y la temperatura del agua que lo rodea con respecto al tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio, con respecto al tiempo, de la velocidad del sonido a través del agua de mar que experimentó el buzo durante una inmersión de 20 min. ¿Cuáles son las unidades?





38. El radio de un cono circular recto se incrementa a una razón de 1.8 pulg/s, mientras su altura disminuye a razón de 2.5 pulg/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es 120 pulg y la altura es de 140 pulg?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambia con el tiempo. En un cierto instante, las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w se incrementan a razón de 2 m/s, en tanto que h disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante las razones a las cuales las siguientes magnitudes cambian.

a) El volumen

b) El área superficial

c) La longitud de la diagonal

40. El voltaje V en un circuito eléctrico sencillo disminuye con lentitud a medida que la batería se gasta. La resistencia R se incrementa lentamente cuando el resistor se calienta. Mediante la ley de Ohm, $V = IR$, determine cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

41. La presión de un mol de un gas ideal se incrementa a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.15 K/s. Utilice la ecuación del ejemplo 2 para determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura es de 320 K.

42. Un fabricante ha modelado su producción anual como una función P (el valor de toda la producción en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número en horas de mano de obra (en miles) y K es el capital invertido (en millones de dólares). Supongamos que cuando $L = 30$ y $K = 8$, la fuerza laboral disminuye a razón de 2000 horas de mano de obra por año y el capital está creciendo a razón de \$500 000 por año. Encuentre la razón de cambio de la producción.

43. Un lado de un triángulo está creciendo a razón de 3 cm/s y un segundo lado está decreciendo a razón de 2 cm/s. Si el área del triángulo permanece constante, ¿a qué razón cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado mide 20 cm de largo, el segundo lado es de 30 cm, y el ángulo es $\pi/6$?

44. Si un sonido de frecuencia f_s es producido por una fuente que se desplaza a lo largo de una recta con rapidez v_s y un observador se mueve con rapidez v_o a lo largo de la misma recta desde la dirección opuesta hacia la fuente, entonces la frecuencia del sonido escuchado por el observador es

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

donde c es la velocidad del sonido, de unos 332 m/s. (Éste es el **efecto Doppler**). Suponga que, en un momento en particular, usted está en un tren que corre a 34 m/s y que acelera a 1.2 m/s^2. Un tren se aproxima desde la dirección opuesta en la otra vía a 40 m/s, acelerando a 1.4 m/s^2, y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 460 Hz. En ese instante, ¿cuál es la frecuencia percibida que usted escucha y con qué rapidez está cambiando?

45-48 Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, a) determine $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$ y b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Si $z = f(x - y)$, demuestre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49-54 Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

49. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugerencia*: sea $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. Compare con el ejemplo 7.

52. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, determine a) $\partial z/\partial r$, b) $\partial z/\partial\theta$, y c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$.

a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

b) Encuentre una fórmula similar para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Una función f se llama **homogénea de grado *n*** si satisface la ecuación $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para toda t, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

a) Compruebe que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3.

b) Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugerencia:* aplique la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

56. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$

57. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define en forma implícita cada una de las tres variables x, y y z como funciones de otras dos: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Si F es derivable y F_x, F_y y F_z son diferentes de cero, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. La ecuación 6 es una fórmula para la derivada dy/dx de una función definida implícitamente por una ecuación $F(x, y) = 0$, siempre que F sea derivable y que $F_y \neq 0$. Demuestre que si F tiene segundas derivadas continuas, entonces una fórmula para la segunda derivada de y es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente

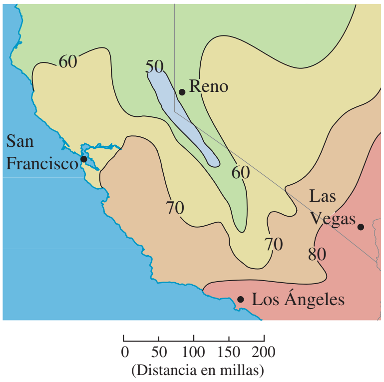


FIGURA 1

En el mapa del clima de la figura 1, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional*, que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas direccionales

Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

1
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

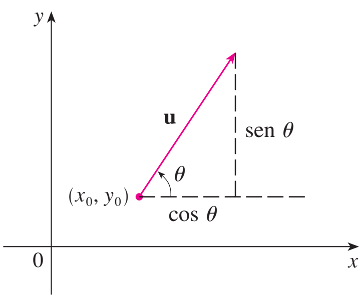


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$.

TEC Visual 14.6A incluye figuras animadas de la figura 3 al hacer girar $\mathbf{u}$ y, por lo tanto T.

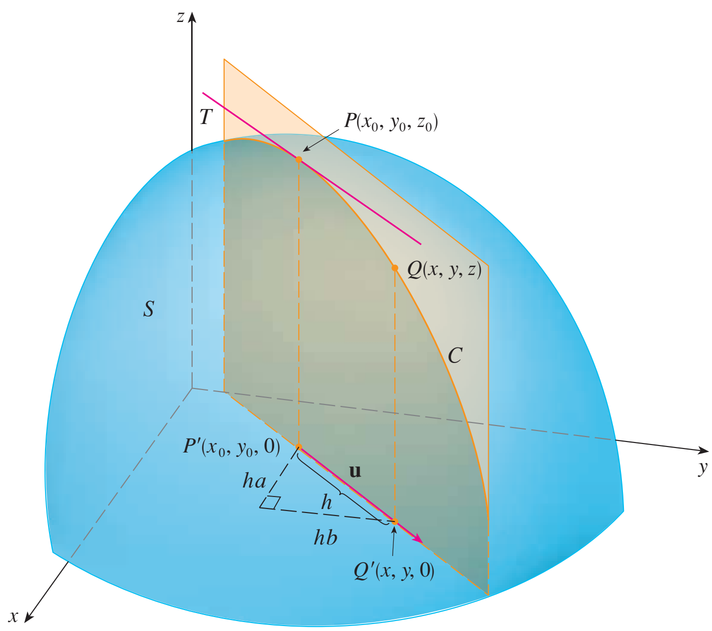


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\mathbf{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\mathbf{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Al comparar la definición 2 con las ecuaciones $\boxed{1}$, observamos que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Con ayuda del mapa del clima ilustrado en la figura 1 estime el valor de la derivada direccional de la función de la temperatura en Reno en la dirección sureste.

SOLUCIÓN El vector unitario dirigido hacia el sureste es $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no es necesario recurrir a esta expresión. Inicie dibujando una recta que pase por Reno y que se dirija hacia el sureste (véase figura 4).

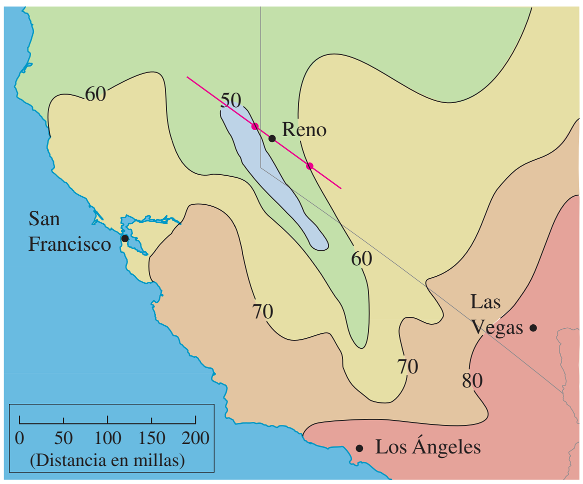


FIGURA 4

Aproximamos a la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} T$ mediante el promedio de la razón de cambio de la temperatura entre los puntos donde la recta interseca las isotermas $T = 50$ y

$T = 60$. La temperatura en el punto al sureste de Reno es $T = 60$ °F y la temperatura en el punto noroeste de Reno es $T = 50$ °F. Al parecer, la distancia entre estos puntos es de casi 75 millas. De este modo, la razón de cambio de la temperatura en la dirección sureste es

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13 \text{ °F/mi}$$

Cuando calculamos la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplicamos el teorema siguiente.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el eje positivo x (como en la figura 2), entonces podemos escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ y así la fórmula del teorema 3 se transforma en

$$\boxed{6} \qquad D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \operatorname{sen}\theta$$

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\mathbf{u}$ es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ mostrada en la figura 5.

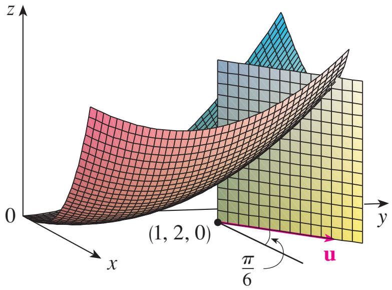


FIGURA 5

SOLUCIÓN Con la fórmula 6 se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

El vector gradiente

Observe que de acuerdo con el teorema 3, la derivada direccional de una función derivable se puede escribir como el producto punto de dos vectores:

7
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto se presenta no sólo al calcular las derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Por eso se le da un nombre especial, *gradiente de* f, y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "nabla f").

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y
$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Con esta notación para el vector gradiente, podemos escribir la expresión (7) para la derivada direccional como

9
$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Esta ecuación expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$ como la proyección escalar del vector gradiente en $\mathbf{u}$.

Vector gradiente $\nabla f(2, -1)$ del ejemplo 4 se muestra en la figura 6 con punto inicial (2, 21). También se muestra el vector **v** que da la dirección de la derivada direccional. Ambos vectores se superponen sobre el mapa de contorno de la gráfica de f.

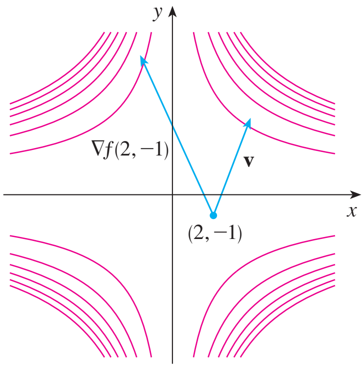


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero calculamos el vector gradiente en $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Note que **v** no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, según la ecuación 9, tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables podemos definir las derivadas direccionales de una manera similar. Otra vez, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario **u**.

10 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

Si utilizamos la notación de vectores, entonces podemos escribir ambas definiciones, 2 y 10, de la derivada direccional en la forma compacta

11
$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector **u** está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (ecuación 12.5.1) y de este modo $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto sobre esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, entonces utilice el mismo método que se aplicó en el teorema 3 para demostrar que

12 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, a + f_y(x, y, z)\, b + f_z(x, y, z)\, c$$

Por lo que toca a la función f de tres variables, el **vector gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

es decir,

13 $$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}}$$

Entonces, justo como en las funciones de dos variables, la fórmula 12 de la derivada direccional se puede volver a expresar como

14 $$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

V EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, a) determine el gradiente de f y b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

a) El gradiente de f es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

b) En $(1, 3, 0)$ tenemos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Maximización de la derivada direccional

Suponga que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

TEC Visual 14.6B proporciona confirmación visual del teorema 15.

15 Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

DEMOSTRACIÓN Según la ecuación 9 o la 14 tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos\theta$ es 1 y esto ocurre cuando $\theta = 0$. Por lo tanto, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ es $|\nabla f|$ y se presenta cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f.

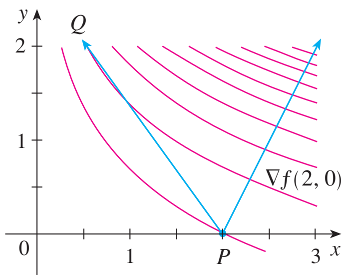


FIGURA 7

En (2, 0) la función del ejemplo 6 se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. Observe que según la figura 7 este vector, al parecer, es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (2, 0). En la figura 8 se ilustra la gráfica de f y el vector gradiente.

EJEMPLO 6

a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

a) Primero calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$$

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2\rangle$ es $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle \cdot \left\langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right\rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

b) De acuerdo con el teorema 15, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2\rangle| = \sqrt{5}$$

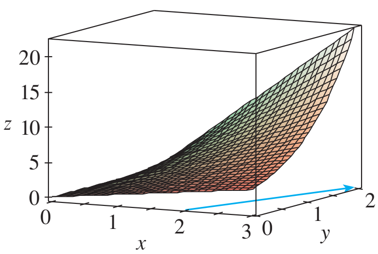


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Supongamos que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dado por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección se incrementa más rápido la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

En el punto (1, 1, −2) el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

De acuerdo con el teorema 15, la temperatura se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o bien, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ o del vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La máxima razón de incremento es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por lo tanto, la máxima razón de incremento de temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4$ °C/m.

Planos tangentes a superficies de nivel

Suponga que S es una superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = k$, es decir, es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C una curva que queda en la superficie S y pasa por el punto P. Recuerde que según la sección 13.1, la curva C se describe mediante una función vectorial continua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Sea t_0 el valor del parámetro que corresponde a P; es decir, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Puesto que C está sobre S, cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$ debe satisfacer la ecuación de S, es decir,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k \tag{16}$$

Si x, y y z son funciones derivables de t y F es también derivable, entonces se aplica la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación 16 como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{17}$$

Pero, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, la ecuación 17 se puede escribir en función de un producto punto como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

En particular, cuando $t = t_0$ tenemos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, de modo que

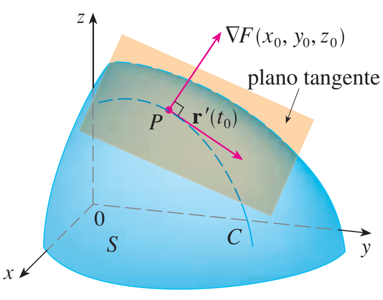


FIGURA 9

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \tag{18}$$

La ecuación 18 establece que *el vector gradiente en P*, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *es perpendicular al vector tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a cualquier curva C sobre S que pasa por P* (véase figura 9). Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, es por lo tanto natural definir el **plano tangente a la superficie de nivel** $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Si aplicamos la ecuación estándar de un plano (ecuación 12.5.7), podemos escribir la ecuación de este plano tangente como

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0} \tag{19}$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida, por lo tanto, por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y, de este modo, mediante la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

20
$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

En el caso especial en el cual la ecuación de una superficie S es de la forma $z = f(x, y)$ (es decir, S es la gráfica de una función f de dos variables), podemos volver a escribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar S como una superficie de nivel de F, con $k = 0$. Entonces

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que la ecuación 19 se vuelve

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que equivale a la ecuación 14.4.2. Por lo tanto, la nueva definición más general de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso especial de la sección 14.4.

En la figura 10 se muestra el elipsoide, el plano tangente y la recta normal del ejemplo 8.

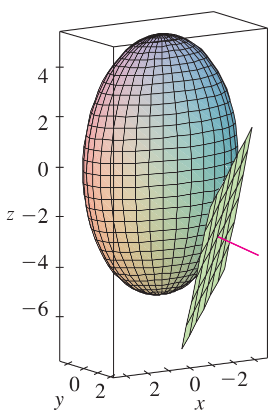


FIGURA 10

V EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones del plano tangente y recta normal en el punto $(-2, 1, -3)$ al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Por lo tanto,

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces la ecuación 19 da la ecuación del plano tangente en $(-2, 1, -3)$ cuando

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo cual se simplifica a $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Según la ecuación 20, las ecuaciones de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\tfrac{2}{3}}$$

Significancia del vector gradiente

Ahora se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia. Así, parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

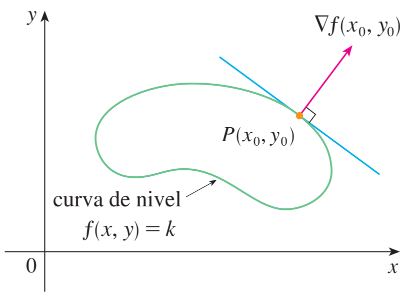


FIGURA 11

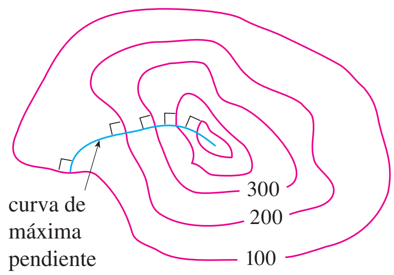
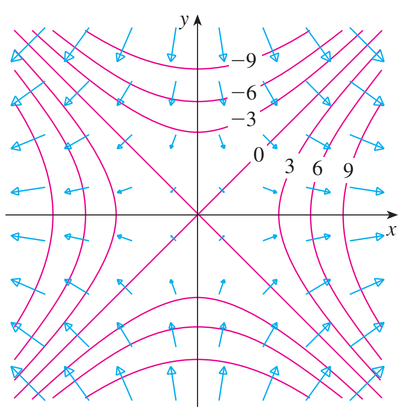


FIGURA 12

Si consideramos un mapa topográfico de una colina y representamos mediante $f(x, y)$ la altura por arriba del nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y), entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente como en la figura 12, haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel. Este fenómeno también se puede observar en la figura 12 de la sección 14.1, donde Lonesome Creek sigue una curva con el descenso más empinado.

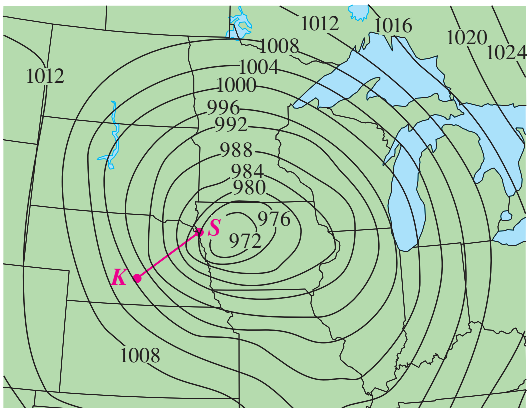
Los sistemas algebraicos computarizados poseen comandos para dibujar muestras de vectores gradiente. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la figura 13 se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*) para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan "pendiente arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.

FIGURA 13

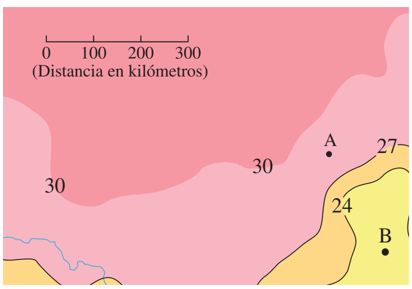


14.6 Ejercicios

1. Se muestran curvas de nivel para la presión barométrica (en milibares), para las 6:00 AM del 10 de noviembre de 1998. Una zona con una presión de sólo 972 mb se mueve la región noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la línea roja de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la derivada direccional?



2. El mapa de contornos muestra el promedio de temperatura máxima para noviembre de 2004 (en °C). Estime el valor de la derivada direccional de esta función temperatura en A, en la dirección de B. ¿Cuáles son las unidades?



3. Una tabla de valores para el índice de temperatura de sensación $W = f(T, v)$ se proporciona en el ejercicio 3 de la página 911. Mediante esta tabla, estime el valor de $D_{\mathbf{u}}f(-20, 30)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/4$

7-10
a) Determine el gradiente de f.
b) Evalúe el gradiente en el punto P.
c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\right)$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\left(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j}\right)$

9. $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle$

10. $f(x, y, z) = y^2e^{xyz}$, $P(0, 1, -1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right\rangle$

11-17 Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8\rangle$

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

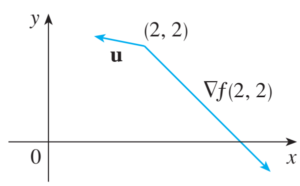
14. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2\rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2\rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

18. Use la figura para estimar $D_{\mathbf{u}}f(2, 2)$.



19. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

20. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $P(1, -1, 3)$ en la dirección de $Q(2, 4, 5)$.

21-26 Determine la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(s, t) = te^{st}$, $(0, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x, y)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(p, q, r) = \arctan(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. a) Demuestre que una función derivable f disminuye más rápidamente en $\mathbf{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
b) Mediante el resultado del inciso a), determine la dirección en que la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decrece más rápidamente en el punto $(2, -3)$.

28. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0, 2)$ tiene el valor de 1.

29. Encuentre todos los puntos en los cuales la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. En las cercanías de una boya, la profundidad de un lago en el punto de coordenadas (x, y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde x, y y z se miden en metros. Un pescador en un bote pequeño parte del punto $(80, 60)$ y se dirige hacia la boya, la cual se ubica en $(0, 0)$. ¿El agua bajo el bote se hace más somera o más profunda cuando el pescador parte? Explique.

31. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es 120°.
a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.
b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.

32. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

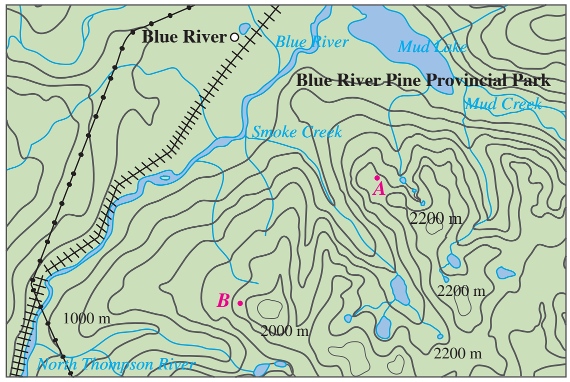
donde T se mide en °C y x, y, z en metros.
a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en la dirección hacia el punto $(3, -3, 3)$.
b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?
c) Encuentre la razón máxima de incremento en P.

33. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
b) ¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?
c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

34. Suponga que escala una montaña cuya forma la da la ecuación $z = 1000 - 0.005 - 0.01y^2$, donde x, y, z se dan en metros, y usted está parado en un punto cuyas coordenadas son $(60, 40, 966)$. El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas va hacia el norte.
a) Si camina directo hacia el sur, ¿empezará a ascender o descender? ¿Con qué rapidez?
b) Si camina hacia el noroeste, ¿empezará a ascender o descender? ¿Con qué rapidez?
c) ¿En qué dirección es la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección? ¿En qué ángulo por arriba de la horizontal la trayectoria inicia en esa dirección?

35. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

36. Se muestra un mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park en British Columbia. Dibuje curvas de mayor descenso a partir del punto A (descendiendo a Mud Lake) y desde el punto B.



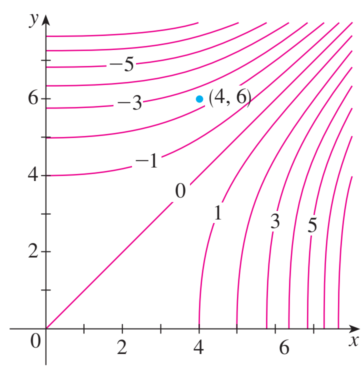
Reproducido con el permiso de Recursos Naturales de Canadá 2009, cortesía del Centro de Información Topográfica.

37. Demuestre que la operación de obtener el gradiente de una función tiene la propiedad dada. Suponga que u y v son funciones derivables de x y y y que a, b son constantes.

a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Trace el vector gradiente $\nabla f(4, 6)$ para la función f cuyas curvas de nivel se muestran. Explique cómo selecciona la dirección y la longitud del vector.



39. La segunda derivada direccional de $f(x, y)$ es

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Si $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ y $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. a) Si $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es un vector unitario y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$$

b) Encuentre la segunda derivada direccional de $f(x, y) = xe^{2y}$ en la dirección de $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$.

41-46 Determine las ecuaciones de a) el plano tangente y b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

41. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

42. $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

43. $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

44. $xy + yz + zx = 5, \quad (1, 2, 1)$

45. $x + y + z = e^{xyz}, \quad (0, 0, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1)$

47-48 Mediante una computadora grafique la superficie, el plano tangente y la recta normal en la misma pantalla. Escoja cuidadosamente el dominio para evitar planos verticales extraños. Elija la perspectiva que le permita visualizar bien los tres objetos.

47. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$ **48.** $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

49. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y con éste determine la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

50. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$ y utilícelo para encontrar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

51. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Encuentre la ecuación del plano tangente al hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ en (x_0, y_0, z_0) y exprésela en forma similar a la del ejercicio 51.

53. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede expresarse como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

55. ¿Existen puntos sobre el hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$?

56. Demuestre que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes entre sí en el punto $(1, 1, 2)$. (Esto significa que tienen un plano tangente común en ese punto.)

57. Demuestre que todo plano que es tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

58. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.

59. ¿Dónde la recta normal al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$ interseca al paraboloide por segunda vez?

60. ¿En qué puntos la recta normal que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ sobre el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Demuestre que la suma de las intersecciones con los ejes x, y y z de cualquier plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ es una constante.

62. Demuestre que las pirámides cortadas desde el primer octante por cualesquier planos tangentes a la superficie $xyz = 1$, en puntos del primer octante, deben tener todas el mismo volumen.

63. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(-1, 1, 2)$.

64. a) El plano $y + z = 3$ al cortar al cilindro $x^2 + y^2 = 5$ forma una elipse. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 1)$.

b) Grafique el cilindro, el plano y la recta tangente en la misma pantalla.

65. a) Dos superficies son **ortogonales** en un punto de intersección si las rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre que las superficies con ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto P donde $\nabla F \neq 0$ y $\nabla G \neq 0$ si y sólo si

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0 \quad \text{en } P.$$

b) Con ayuda del inciso a) demuestre que las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son ortogonales en cada punto de intersección. Sin usar el cálculo, ¿se da cuenta por qué esto es cierto?

66. a) Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen, pero que no existen las derivadas direccionales en todas las otras direcciones.

b) Grafique f cerca del origen y comente cómo la gráfica confirma el inciso a).

67. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ se conocen en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es posible determinar ∇f en ese punto? Si es así, ¿cómo lo haría?

68. Demuestre que si $z = f(x, y)$ es derivable en $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugerencia:* use directamente la definición 14.4.7.]