Trabajo Practico 2 - Matematicas Discretas

Martin Luraschi, Luca Troiano, Roy Herrera, Federico Polidoro

September 19, 2024

1. - Dar los primeros cinco términos de una sucesión que verifique la relación derecurrencia $a_n = n\ a_{n-1}$.

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2 * a_1 = 2 * 1 = 2$
- $a_3 = 3 * a_2 = 3 * 2 = 6$
- $a_4 = 4 * a_3 = 4 * 6 = 24$
- $a_5 = 5 * a_4 = 5 * 24 = 120$

2. - Dar los primeros seis términos de una sucesión de términos positivos que verifique la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1}$ / a_{n-2}.

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2$
- $a_3 = a_2 / a_1 = 2 / 1 = 2$
- $a_4 = a_3 / a_2 = 2 / 2 = 2$
- $a_5 = a_4 / a_3 = 1 / 2 = 1/2$
- $a_6 = a_5 / a_4 = (1/2) / 1 = (1/2)$

3. - Dar los primeros cinco términos de una sucesión que verifique la relación de recurrencia $a_n = a_{n\text{-}1} + n^2$.

1. $a^1 = a^{1\text{-}1} + 1^2 = 1 + 1 = 2$
2. $a^2 = a^{2\text{-}1} + 2^2 = 2 + 4 = 6$
3. $a^3 = a^{3\text{-}1} + 3^2 = 6 + 9 = 15$
4. $a^4 = a^{4\text{-}1} + 4^2 = 15 + 16 = 31$
5. $a^5 = a^{5\text{-}1} + 5^2 = 31 + 25 = 56$

4. - Dar los primeros cinco términos de una sucesión que verifique la relación de recurrencia $a_n = r\ a_{n\text{-}1}$.

1. $a^1 = r * a^{1\text{-}1} = r*1 = r$
2. $a^2 = r * a^{2\text{-}1} = r*r = r^2$
3. $a^3 = r * a^{3\text{-}1} = r*r^2 = r^3$
4. $a^4 = r * a^{4\text{-}1} = r*r^3 = r^4$
5. $a^5 = r * a^{5\text{-}1} = r*r^4 = r^5$

5. - Dar los primeros cinco términos de una sucesión que verifique la relación de recurrencia $a_n = (n+1)a_{n\text{-}2}$.

1. $a_1 = (1+1)a_{1\text{-}2} = 2 * a_{\text{-}1}$
2. $a_2 = (2+1)a_{2\text{-}2} = 3 * a_0$
3. $a_3 = (3+1)a_{3\text{-}2} = 4 * a_1$
4. $a_4 = (4+1)a_{4\text{-}2} = 5 * a_2$
5. $a_5 = (5+1)a_{5\text{-}2} = 6 * a_3$

Esto verifica que hay una relacion de recurrencia porque todas los posibles terminos a_n siempre van a incluir un $a_{n\text{-}2}$ vease si extiendo el a_5

$a_5 = (5+1)a_{5-2} = 6 * a_3 = 6 * 4 * a_1 = 6 * 4 * 2 * a_{-1} = ...$

6. - Dar los primeros seis términos de una sucesión que verifique la relación de recurrencia $a_n = (n+1)a_{n-2}$ tal que $a_0 = 2$.

1. $a_0 = 1 * a_{-2} = 2$
2. $a_1 = (1+1)a_{1-2} = 2 * a_{-1}$
3. $a_2 = (2+1)a_{2-2} = 3 * 2 = 6$
4. $a_3 = (3+1)a_{3-2} = 4 * a_1$
5. $a_4 = (4+1)a_{4-2} = 5 * 6 = 30$
6. $a_5 = (5+1)a_{5-2} = 6 * 4 * a_1$

7. - Dar los primeros seis términos de una sucesión que verifique la relación de recurrencia $a_n = n\ a_{n-1}$ tal que $a_3 = 18$.

1. $a_2 = 6$
2. $a_3 = 3 * a_{3-1} = 18$
3. $a_4 = 4 * a_{4-1} = 4 * 18 = 72$
4. $a_5 = 5 * a_{5-1} = 5 * 72 = 360$
5. $a_6 = 6 * a_{6-1} = 6 * 360 = 2160$
6. $a_7 = 7 * a_{7-1} = 7 * 2160 = 15120$

8. - Resolver las relaciones de recurrencia

- a. a_n-2/3 $a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$; $a_0 = -1$

$a_n = 2\frac{}{3a_{n-1}}$

$a_1 = -2\frac{}{3}$

$a_2 = 2\frac{}{3(-\frac{2}{3})=-\frac{4}{9}}$

$a_3 = -8\frac{}{27}$

- b. 2 a_n+1-3 $a_n = 0$, $n \geq 0$; $a_0 = 1$

$a_{n+1} = 3\frac{}{2a_n}$

$a_n = 3\frac{}{2a_{n-1}}$

$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_0$

$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

- c. 2 a_n+1-3 $a_n = 0$, $n \geq 0$; $a_0 = -2$

$a_n = (-2) \left(\frac{3}{2}\right)^n$

- d. a_n+1 - 5a_n + 6$a_{n-1} = 0$ $n \geq 1$; $a_0 = 0$, $a_1 = 2$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r - 2)(r - 3) = 0$

$a_n = A * 2^n + B * 3^n$

$a_0 = A * (2)^0 + B * (3)^0 = A + B = 0$

$A = -B$

$a_1 = A * (2)^1 + B * (3)^1 = A2 + B3 = 2$

$A2 + B3 = 2$

$(-B)2 + B3 = 2$

$B = 2$

$A = -B = -2$

$a_n = -2*2^n+2*3^n$

- e. $a_n+1 = 4a_n - 5a_{n-1}$, $n \geq 1$; $a_0 = -1$, $a_1 = 3$

  Uh...

- f. $a_n = 4\ a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

  $a_n = (6-2n) * 2^n$

- g. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

  $a_n = 1 + n$

9. - Dada la relación de recurrencia 8 a_{n+2} + 4 a_{n+1} - 4 $a_n = 0$. $n \leq 0$; Indicar si las siguientes sucesiones pueden ser solución:

- a. $a_n = 3\ (-1)^n$

$$a_{n+1} = 3(-1)^{n+1}$$
$$a_{n+2} = 3(-1)^{n+2}$$
$$8*3(-1)^{n+2} + 4*3(-1)^{n+1} - 4*3(-1)^n$$
$$24(-1)^{n+2} + 12(-1)^{n+1} - 12(-1)^n$$
$$(-1)^{n+2} = (-1)^n$$
$$(-1)^{n+1} = -(-1)^n$$
$$24(-1)^n + 12(-1)(-1)^n - 12(-1)^n$$
$$24(-1)^n - 12(-1)^n - 12(-1)^n$$
$$24(-1)^n - 24(-1)^n = 0$$

- b. $a_n = 3\ (-1/2)^n + 1$

$$a_{n+1} = 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+1} + 1 = 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2}$$

$$a_{n+2} = 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} + 1 = 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+3}$$

$$24\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+3} + 12\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} - 12\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+3} = \left(\frac{-2}{1}\right)\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$$

$$24 \cdot \left(\frac{-2}{1}\right) \cdot \left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} + 12\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} - 12\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+1}$$

$$36\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} - 12\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{-2}{1}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + \left(\frac{-2}{1}\right)^{n} - 2\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} = 0$$

RTA: La sucesión satisfice la relación de recurrencia.

- c. $a_n = 4\ (-1)^n + (1/2)^n$

$$a_{n+1}=4(-1)^{n+1}+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+1}$$

$$a_{n+2}=4(-1)^{n+2}+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+2}$$

$$32(-1)^{n+2}+8\left(\frac{2}{1}\right)^{n+2}+16(-1)^{n+1}+4\left(\frac{2}{1}\right)^{n+1}-16(-1)^{n}-4\left(\frac{2}{1}\right)^{n}$$

$$32(-1)^{n}+16(-1)^{n+1}-16(-1)^{n}+2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}+2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}-4\left(\frac{2}{1}\right)^{n}$$

$$32(-1)^{n}-16(-1)^{n}-16(-1)^{n}=0$$

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}+2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}-4\left(\frac{2}{1}\right)^{n}=0$$

RTA: La sucesión satisfice la relación de recurrencia.

- d. a_n = -4 $(1)^n$ + $(1/2)^n$

$$a_{n+1}=-4+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+1}$$

$$a_{n+2}=-4+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+2}$$

$$8\left[-4+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+2}\right]+4\left[-4+\left(\frac{2}{1}\right)^{n+1}\right]-4\left[-4+\left(\frac{2}{1}\right)^{n}\right]$$

$$-32+8\left(\frac{2}{1}\right)^{n+2}-16+4\left(\frac{2}{1}\right)^{n+1}+16-4\left(\frac{2}{1}\right)^{n}$$

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}+2\left(\frac{2}{1}\right)^{n}-4\left(\frac{2}{1}\right)^{n}=0$$

$$-32\neq 0$$

RTA: La sucesión no satisfice la relación de recurrencia.

En caso afirmativo, justificar e indicar cuáles serían las condiciones iniciales que hay que imponer para obtener dicha solución. En caso negativo, justificar.

10 - Dada la relación de recurrencia $a_{n+2} \quad a_n = 0$, indicar si las siguientes sucesiones pueden ser solución:

- a. $a_n = 3(1)^n$

$$a_{n+2} - a_n = 3(-1)^n - 3(-1)^n = 0$$

RTA: La sucesión satisfice la relación de recurrencia.

- b. $a_n = 3(1/2)^n + 1$

$$a_{n+2} = 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} + 1$$

$$\left(\frac{-2}{1}\right)^{n+2} = \left(\frac{-2}{1}\right)^{2}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} = \frac{4}{1}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n}$$

$$a_{n+2} = 3\cdot\frac{4}{1}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + 1 = \frac{4}{3}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + 1$$

$$a_{n+2} - a_n = \left(\frac{4}{3}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + 1\right) - \left(3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + 1\right)$$

$$a_{n+2} = \frac{4}{3}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} + 1 - 3\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} - 1$$

$$a_{n+2} = \frac{-4}{9}\left(\frac{-2}{1}\right)^{n}$$

RTA: La ecuación no se cumple (a menos que $\left(\frac{-2}{1}\right)^{n} = 0$, lo cual nunca es el caso para un n entero). Por lo tanto, la sucesión no es una solución.

- c. $a_n = 7 + 2(1)^n$

$$a_{n+2} = 7 + 2(-1)^{n+2} = 7 + 2(-1)^n$$

$$a_{n+2} - a_n = \left(7 + 2(-1)^n\right) - \left(7 + 2(-1)^n\right) = 0$$

RTA: La sucesión satisfice la relación de recurrencia.

- d. $a_n = 1/3\ 2^n$

$$a_{n+2}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+2}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2^{n}=\frac{4}{3}\cdot 2^{n}$$

$$a_{n+2}-a_{n}=\frac{3}{4}2^{n}-\frac{3}{1}2^{n}=\frac{3}{3}2^{n}=2^{n}$$

RTA: La ecuación no se cumple (a menos que $2^n=0$, lo cual nunca es el caso para un n entero). Por lo tanto, la sucesión no es una solución.

- e. $a_n = 8$

$$a_{n+2}=-8$$

$$a_{n+2}-a_{n}=-8-(-8)=0$$

RTA: La sucesión satisfice la relación de recurrencia.

En caso afirmativo, justificar e indicar cuáles serían las condiciones iniciales que hay que imponer para obtener dicha solución. En caso negativo, justificar.

13 - Una inversión de $100 iniciales recibe un interés de 10% anual, capitalizado mensualmente. Plantear una relación de recurrencia para calcular el dinero acumulado al cabo de n meses.

La ecuación de recurrencia necesaria para calcular la ganancia de dinero luego de n meses es:

r = 0.1/12

r = 0.00833

$a^n = \{1+r\} * a^{n-1}$

Hay que tener en cuenta que $a^0 = 100$

18 - Hallar una relación de recurrencia para a_n, el número de formas de avanzar n metros dando pasos de 1 o 2 metros. Resolverla.

La relación de recurrencia, en este caso, será:

$a^n = a^(n-1) + a^(n-2)$

Se considerará que $a^0 = 1$, debido a que, como no hay mas metros que avanzar, la única opción para llegar a destino es no moverse También se considerará que $a^1 = 1$, debido a que la única opción para llegar a destino es avanzar 1 metro De acuerdo con lo anterior podemos resolver la secuencia planteada

1. $a^2 = a^{(2-1)} + a^{(2-2)} = 1 + 1 = 2$
2. $a^3 = a^{(3-1)} + a^{(3-2)} = 2 + 1 = 3$
3. $a^4 = a^{(4-1)} + a^{(4-2)} = 3 + 2 = 5$
4. $a^5 = a^{(5-1)} + a^{(5-2)} = 5 + 3 = 8$
5. $a^6 = a^{(6-1)} + a^{(6-2)} = 8 + 5 = 13$

25 - Un préstamo de $2500 se debe pagar en cuotas fijas mensuales de $300, con un interés mensual de 8%. Si an es el dinero adeudado en el mes n, plantear una relación de recurrencia para an. ¿En cuántos meses se saldará la deuda?

$$a(n) = a(n-1) * 1{,}08 - 300$$

En el mes 15 la deuda queda saldada